МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет»

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Пермь
ПГГПУ
2013

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

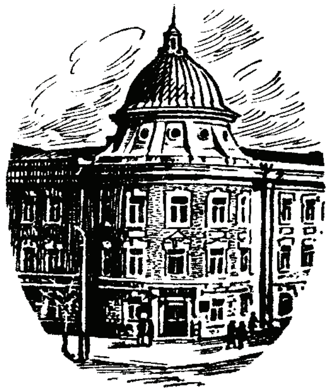
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский государственный гуманитарно-педагогический
университет»

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

*Направление подготовки:*050100 – «Педагогическое образование»
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Рекомендовано УМО



Пермь
ПГГПУ
2013

УДК 519.25
ББК 192.1
О-753

Р е ц е н з е н т :

Доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики
Пермского филиала государственного университета «Высшая школа экономики»
Плотникова Евгения Григорьевна

А в т о р ы-с о с т а в и т е л и :

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики
обучения математике *Власова Ирина Николаевна* (отв. за вып.)

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики
обучения математике *Лурье Михаил Леонидович*

Старший преподаватель кафедры теории и методики
обучения математике *Мусихина Ирина Васильевна*

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
прикладной информатики *Худякова Анна Владимировна*

О-753 **Основы** математической обработки информации: учебное пособие для организации самостоятельной деятельности студентов / Авт.-сост. И. Н. Власова (отв. за вып.), М. Л. Лурье, И. В. Мусихина, А. В. Худякова. Перм. гос. гумат.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – 116 с.

Учебное пособие по дисциплине «Основы математической обработки информации» составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 050100 Педагогическое образование.

Дисциплина входит в математический и естественнонаучный цикл, относится к базовой части учебного плана ООП.

Учебное пособие предназначено для студентов, слушателей курсов и преподавателей.

УДК 519.25
ББК 192.1

Пособие издано на средства Программы стратегического развития Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета

Печатается по решению учебно-методического Совета ФГБОУ ВПО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В данном учебном пособии изложены те идеи и факты из математики и информатики, которые помогут вам освоить основные методы обработки информации и пригодятся в профессиональной деятельности. Материал, представленный в учебном пособии, снабжен большим количеством примеров и системой вопросов для подготовки к занятию. Это позволяет представить общую картину о математических методах и освоить их в ходе выполнения заданий. Кроме того, в конце каждого раздела приведены задачи и вопросы для самостоятельной работы.

Целью изучения данной дисциплины является формирование системы знаний, умений и навыков, связанных с особенностями математических способов представления и обработки информации как базы для развития универсальных компетенций и основы для развития профессиональных компетенций. Результатом изучения дисциплины является освоение следующих компетенций:

– способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);

– готовность использовать основные методы и средства получения, хранения и переработки информации, готовность работать с компьютером как средством управления информацией (ОК-8);

– готовность применять современные методики и технологии, в том числе и информационные, для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса на конкретной образовательной ступени конкретного образовательного учреждения (ПК-2);

– способность использовать возможности образовательной среды, в том числе информационной, для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса (ПК-4).

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

– основные способы представления информации с использованием математических средств;

– основные математические понятия и методы решения базовых математических задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;

– этапы метода математического моделирования

уметь:

– осуществлять поиск и отбирать информацию, необходимую для решения конкретной задачи;

– осуществлять перевод информации с языка, характерного для предметной области, на математический язык;

– определять вид математической модели для решения практической задачи;

– использовать метод математического моделирования при решении практических задач в случаях применения простейших математических моделей;

– использовать основные методы статистической обработки экспериментальных данных;

владеть:

– содержательной интерпретацией и адаптацией математических знаний для решения образовательных задач в соответствующей профессиональной области;

– основными методами решения задач, относящихся к дискретной математике, и простейших задач на использование метода математического моделирования в профессиональной деятельности.

При изучении данной дисциплины предусмотрены следующие несколько различных форм самостоятельной работы. Каждая из них специфична, но в то же время владение описанными видами деятельности способствует более успешному освоению любой дисциплины и самообразованию.

Конспектирование в рабочей тетради: самостоятельно найти источник и зафиксировать основные идеи, способы, определения и методы по данной теме; составить план выступления по конспекту; представить информацию в виде схем, таблиц или диаграмм.

Написание реферата: определить несколько источников информации по данной теме, составить план реферата и написать основные задачи, представить информацию в логической последовательности с примерами из профессиональной области.

Работа с интернет-источниками: представить информацию из 5–7 различных интернет-источников, дать их сравнительную характеристику.

Составление аналитических таблиц: информацию из нескольких (3–5) источников представить в таблицы, для этого разделив ее на смысловые блоки, либо сгруппировать информацию по каким-либо выбранным критериям. После таблицы дать комментарий, вывод.

Исследовательская работа: определить область решения данной проблемы; определить методы и способы решения, источники для дополнительной информации; представить план решения и решение исследовательской задачи; проанализировать эффективность выбранного метода решения.

Презентация: по данной теме выбрать основную информацию (текстовую, цифровую, иллюстрации) и разработать презентацию на 7–10 слайдов по правилам составления презентаций.

Структура каждого раздела:

1) задания и вопросы для подготовки к занятию;
2) теоретические сведения и образцы решения основных типов задач;
3) задания для работы на занятии; лабораторные работы;
4) задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки;
5) рекомендуемая литература.

Раздел 1.
РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ

Вопросы для подготовки к занятию

1. Что, с Вашей точки зрения, изучает математика?

2. Можно ли показать число 5? Если да, то проиллюстрируйте, как вы это можете сделать? А число $\sqrt{5}$?

3. Чему Вы научились при изучении математики в школе?

4. Нужна ли математика в повседневной жизни? Приведите пример, когда математика помогла Вам в решении какой-либо проблемы.

5. Нужна ли математика в Вашей будущей профессиональной деятельности? Приведите пример, при решении каких профессиональных задач Вам поможет математика.

Теоретические сведения

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Говоря о становлении математики как науки, академик А. Н. Колмогоров выделил четыре периода развития математики:

– зарождение математики (до IV в. до н. э.);
– элементарная математика (от IV–V вв. до н. э. до начала XVII в.);
– математика переменных величин (XVII–XVIII вв.);
– современная математика (XIX–XXI вв.).

Математика – одна из древнейших наук, игравшая важнейшую роль в жизни и деятельности человека на всех исторических этапах, так как всегда нужно было что-либо считать и чертить, измерять и вычислять, прогнозировать и проектировать, создавать новое.

Единственной наукой, которая задолго до широкого развития математического изучения явлений природы в XVII–XVIII вв. систематически предъявляла математике свои большие требования, была астрономия, благодаря которой развивалась тригонометрия. Запас понятий, с которыми имела дело математика до начала XVII в., составляет основу «элементарной математики», преподаваемой в начальной и средней школе.

Сегодня в математике обычно выделяют следующие области: математический анализ, алгебру, аналитическую геометрию, линейную алгебру и геометрию, дискретную математику и математическую кибернетику, математическую логику, дифференциальные уравнения, дифференциальную геометрию, компьютерную геометрию, топологию, теорию чисел, функциональный анализ и интегральные уравнения, теорию функций комплексного переменного, уравнения с частными производными, уравнения и методы математической физики, теорию вероятностей, актуарную математику, математическую статистику, теорию случайных процессов, вариационное исчисление и методы оптимизации, вычислительную математику и программирование (методы вычислений, то есть численные методы), криптографию, теорию кодирования и теорию искусственного интеллекта.

Такое деление довольно условно, так как многие области математики тесно переплетаются, и новые направления часто возникают на стыке классических. Сегодня можно говорить, что современная математика – это «метанаука», объединяющая комплекс дисциплин: арифметику – теорию чисел, алгебру, геометрию, математический анализ, теорию множеств, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию игр и многие, многие другие (насчитывают несколько десятков крупных направлений). На стыках наук появляются разделы: математическая физика, математическая логика, математическая лингвистика, математическая экономика и др.

Математика – необходимый инструмент познания в любой отрасли человеческой деятельности – характеризуется высокой степенью абстрактности ее понятий и высокой степенью их обобщенности. Абстракция математики достигается использованием специального символьного языка, который, освобождаясь от конкретного содержания, привносит в математику универсальность. Благодаря этому один и тот же математический аппарат можно применять в самых различных естественных и гуманитарных науках.

Так, например, колебания и в механических системах, и в электрических цепях представляются одними и теми же математическими уравнениями. Одинаковые математические подходы используются для описания сердечного кровообращения и управления зенитным огнем. Подобная же картина – при исследовании механизмов разрушения конструкций в технике и процессов образования социальных катастроф.

По меткому выражению известнейшего ученого Нильса Бора, «*математика – это больше, чем наука, это – язык*», то есть язык, на котором можно ставить вопросы и отвечать на них принципиально.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности, в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Без современной математики с ее развитым логическим и вы-числительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Одним из ярких примеров достижений науки, одним из свидетельств неограниченной познаваемости природы было открытие существования планеты Нептун путем математических вычислений – «на кончике пера». Так, сначала учеными Леверье и Адамсом (1845 г.) при помощи расчетов были определены орбита неизвестной планеты, ее масса, место на небе, где она в данное время должна была находиться. И только после этого планета была найдена с помощью телескопа на указанном месте. Аналогичным способом век спустя была открыта еще одна планета – Плутон.

История науки XIX–XX вв. также дает многочисленные примеры успехов математического прогнозирования. Некоторые из них: Дирак разработал математическую теорию движения электрона и предсказал существование позитрона (1928 г.); несколько позже (1964 г.) физики-экспериментаторы искали частицу, указанную другой математической теорией, и открыли омегаминус-гиперон.

Причина, по которой без математических методов сейчас не обходятся не только техника, механика, электроника, экономика, но и медицина, экология, психология, социология, лингвистика, история, юриспруденция и др., проста – для математических методов характерны:

– четкость формулировок и определений;
– использование точных количественных оценок;
– логическая строгость;
– сочетание индуктивного и дедуктивного подходов;
– универсальность.

Математика занимает особое место среди других наук. Математику нельзя причислять к естествознанию (так как исключает наблюдение и эксперимент), хотя и зародилась она из практики как естественная наука.

«Типичным примером полного господства математических методов можно считать небесную механику, в частности, учение о движении планет. Имеющий очень простое математическое выражение закон всемирного тяготения почти полностью определяет изучаемый здесь круг явлений. При переходе от механики к физике несколько возрастают трудности применения математического аппарата (выбор предпосылок использования математики и трактовка результатов).

В других естественных науках (например, биологических) математические методы играют более подчиненную роль. Если и удается описать течение биологических явлений математическими формулами, то область пригодности этих формул остается весьма ограниченной, а соответствие их реальному ходу явлений грубо приближенным» (Колмогоров А. Н.).

Вся продуктивная деятельность человека так или иначе связана с обработкой информации. Процесс развития общества неотделим от становления все более полных и эффективных методов обработки информации. Каждая область науки и в большой степени различные отрасли деятельности (образование, экономика, экология, добывающие отрасли, транспорт, связь, медицинская диагностика, управление и т. д.) представляют собой совокупность идей и методов, предназначенных для целенаправленной и эффективной обработки той информации, за которую ответственна данная область. Идеи, принципы и алгоритмы, которые в настоящее время составляют методологию обработки информации, уже сегодня позволили сделать существенный прорыв в технологии обработки информации (наглядный пример – Internet).

Методы обработки и принципы их реализации для каждой области имеют свои специфические особенности, которые, прежде всего, обусловливаются конкретным видом носителя информации, методами кодирования и способами представления результатов обработки. Вследствие этого устройства обработки информации для различных областей часто оказываются внешне непохожими друг на друга. Но за этой внешней непохожестью скрываются одинаковые методология и принципы построения систем обработки, что является определяющим и составляет предмет изучения в данном курсе.

Основу методов обработки информации составляют вычислительная математика, теория информации и математическая статистика. Современные методы математической статистики и теории информации используют сложный математический аппарат, но базируются тем не менее на простых исходных положениях, вытекающих из практических задач.

Задания для работы на занятии

1.1. Известна цитата М. В. Ломоносова: «Математику уже затем учить нужно, что она ум в порядок приводит». Как вы думаете, не утратила ли свою актуальность эта цитата?

1.2. В чем, по вашему мнению, заключается ценность математики? Чем она может помочь, например, физику (химику, биологу, филологу, экономисту, историку, социологу)?

1.3. Какие знания и умения, кроме вычислительных, приходилось вам использовать в вашей жизни?

1.4. И. В. Гете писал: «Математики, как французы: все, что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным». Как вы прокомментируете это высказывание? В чем специфика математического языка?

1.5. Что, по вашему мнению, означает термин «информация»? Что вы понимаете под фразой «обработка информации»?

1.6. Прокомментируйте, в каком смысле встречается термин «информация» в названии изучаемой дисциплины «Основы математической обработки информации».

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки

1.7. Поясните характеристики математических методов на одном из известных вам методов (аксиоматическом, моделировании).

1.8. Приведите примеры высказываний о математике, сделанных не математиками. Прокомментируйте эти высказывания.

1.9. Подберите примеры ситуаций из жизни, или из той предметной области, которой вам предстоит заниматься, в которых необходимо использовать математические знания.

1.10. Сформулируйте и запишите цели изучения курса «Основы математической обработки информации».

1.11. С какой информацией вам придется работать в вашей предметной области? Какие средства представления информации используются в этой области?

Литература

1. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 2005.

2. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 2007.

3. Уткин В. Б., Балдин К. В., Рокосуев А. В. Математика и информатика. Учебное пособие. По ред. Уткина В. Б. – М.: Дашков и Ко, 2011 (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Р а з д е л 2.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ. ДИАГРАММЫ. ТАБЛИЦЫ. ГРАФИКИ

Вопросы для подготовки к занятию

1. Какие математические средства представления информации вам известны? Вспомните не менее трех примеров. Для каждого средства сконструируйте ситуацию, в которой его применение обоснованно.

2. Каким образом вы можете представить информацию, предложенную в следующей задаче: одна бригада плотников, состоящая из 28 человек, может построить дом за 54 дня, а другая – из 30 человек – за 45 дней. Какая бригада работает лучше?

3. Что такое диаграмма? Какие виды диаграмм вам известны?

4. Какие средства представления информации использованы в следующем фрагменте текста из доклада «Основные результаты деятельности образовательных учреждений города Перми за 2010/11 учебный год» **[8].**

Таблица 2.1

Итоги единого государственного экзамена по предметам

Предмет	**Кол-во сдававших**	**Кол-во несдавших**	**% несдавших**	**Средний балл**
Обязательные предметы				
Русский язык	4334	30	0,69	64,94
Математика	4333	77	1,78	51,65
Предметы по выбору учащихся				
Литература	299	4	1,34	65,48
География	170	5	2,94	63,17
Биология	518	17	3,28	56,99
Информатика	307	3	0,98	72,01
Английский язык	491	2	0,41	72,47
Немецкий язык	10	0	0,00	60,50
Французский язык	4	0	0,00	52,00
Химия	297	14	4,71	57,58
Физика	999	23	2,30	56,31
История	604	42	6,95	53,72
Обществознание	2169	37	1,71	60,84

Диаграмма 1

Динамика результативности ЕГЭ по русскому языку и математике с 2008 по 2011 год

Диаграмма 2

Динамика результативности ЕГЭ по биологии, информатике, химии и физике с 2008 по 2011 год

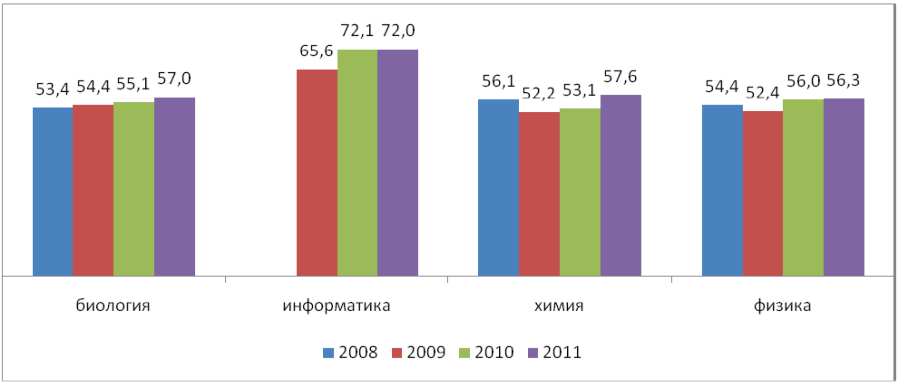


Таблица 2.2

Выпускники вузов и ссузов, поступившие на работу

Год	Количество выпускников вузов, поступивших на работу				Количество выпускников ссузов, поступивших на работу			Всего вновь пришедших в ОУ города молодых специалистов
	ПГПУ	ПГУ	Прочие вузы	Всего из вузов	ППК №1	Прочие ссузы	Всего из ссузов	
2008	44	14	7	65	16	36	52	117
2009	112	24	10	146	43	102	145	291
2010	111	23	10	143	33	100	133	276

Используя данные таблицы 2.1 определите:

– динамику какого процесса можно по ней наблюдать?

– можно ли определить средний балл по предметам?

– можно ли сравнить средний бал по предметам с предыдущим годом?

5. Что иллюстрирует диаграмма 1? Какие обязательные элементы диаграммы вы бы выбрали?

6. Чем схожи и чем отличаются диаграммы 1 и 2?

7. Какая характеристика выбрана для составления табл. 2.2? Можно ли проследить динамику заданного процесса? Как еще можно представить данные этой таблицы?

Теоретические сведения и образцы решения основных типов задач

Диаграмма – графическое изображение статистических данных при помощи линий или геометрических фигур. Выделяют следующие типы диаграмм:

– круговые или секторные;

– столбчатые;

– гистограммы;

– точечные;

– кольцевые;

– лепестковые.

Круговые (секторные) диаграммы и составные столбчатые диаграммы удобно использовать в том случае, когда необходимо представить структуру целого, состоящего из непересекающихся частей. В этом случае целое чаще всего принимается за 100%. Таким образом, сумма составляющих его частей должна быть равна 100%.

Столбчатая диаграмма – это график с одной осью для изображения качественных или порядковых показателей. Данные представляются в виде параллельных прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины.

Столбчатые диаграммы используются для представления сравнительных данных. Столбики могут быть сгруппированы или использованы для того, чтобы показать отклонение от исходного уровня. Примером такой диаграммы является диаграмма 1 из вопросов для подготовки к занятию.

Таким образом, в зависимости от ведущей идеи целесообразно выбирать тот или иной тип диаграммы, используемой для представления данных. Любой аспект данных, на который общается внимание, может быть выражен посредством одного из пяти основных типов сравнения: покомпонентного, позиционного, временного, частотного, корреляционного.

Диаграммы являются средством наглядного представления данных и облегчают выполнение сравнений, выявление закономерностей и тенденций данных.

Всего Microsoft Excel предлагает Вам несколько типов плоских и объемных диаграмм, разбитых, в свою очередь, на ряд форматов. Если Вам их недостаточно, Вы можете создать собственный пользовательский формат диаграммы.

Диаграммы создают на основе данных, расположенных на рабочих листах. Как правило, используются данные одного листа. Это могут быть данные диапазонов как смежных, так и несмежных ячеек. Несмежные ячейки должны образовывать прямоугольник. При необходимости в процессе или после создания диаграммы в нее можно добавить данные, расположенные на других листах.

Диаграмма может располагаться как графический объект на листе с данными (не обязательно на том же, где находятся данные, взятые для построения диаграммы). На одном листе с данными может находиться несколько диаграмм. Диаграмма может располагаться на отдельном специальном листе.

Таблица (от польск. Tablica < лат. *tabula* – доска, таблица) – набор, составленный из нескольких колонок, имеющих самостоятельные заголовки и отделенных друг от друга продольными линейками. Данные располагаются по графам и строкам таким образом, что каждый отдельный показатель входит в состав и граф, и строк. Таблица без продольных разделительных линий называется выводом.

График (от греч. graphikos – начертанный):

1) чертеж, применяемый для наглядного изображения зависимости какой-либо величины (напр., пути) от другой (напр., времени), т. е. линия, дающая наглядное представление о характере изменения функции. График функции $y = f(x)$ состоит из точек, абсциссы которых равны значениям x, а ординаты – соответствующим значениям y; в некоторых случаях функции задаются непосредственно с помощью графика;

2) производственный график – календарный план выпуска продукции предприятием в целом и его отдельными подразделениями, выраженный в графической или иной (напр., табличной) форме;

3) железнодорожный график – особый графический способ изображения движения поездов.

Представление данных в графическом виде позволяет решать самые разнообразные задачи. Основное достоинство такого представления – наглядность. На графиках легко просматривается тенденция к изменению. Можно даже определять скорость изменения тенденции. Различные соотношения, прирост, взаимосвязь различных процессов – все это легко можно увидеть на графиках.

Задания для работы на занятии

2.1. Для данных из следующих фрагментов текстов постройте диаграмму, таблицу, график. Назовите их ведущую идею.

А) Для 1000 детей и подростков «группы риска» в школах города была организована работа 196 досуговых групп по интересам и трудовая занятость с оплатой труда для 310 подростков. Учреждения дополнительного образования привлекли в свои коллективы 997 учащихся «группы риска» и 461 учащегося, находящегося в социально опасном положении. Кроме того, 400 учащихся «группы риска» занимались по программам дополнительного образования на постоянной основе в учреждениях ведомства культуры, молодежной политики, физкультуры и спорта, 1423 – в школах. В целом охват учащихся «группы риска» дополнительным образованием составил 75%. Наметилась устойчивая тенденция увеличения доли учащихся «группы риска», охваченных различными формами дополнительного образования, в общем количестве детей данной категории.

Б) В течение 2010/11 учебного года о системе пермского образования было 129 сообщений в СМИ, из них 43 – в печатных изданиях «Комсомольская правда – Пермь», «Местное время», «Новости города», «Пятница», «Бизнес-класс»; 15 – на радиостанции «Эхо Перми» и на краевом радио, 71 телевизионный сюжет в информационных программах каналов ГТРК-Пермь, «Рифей», ВЕТТА, УралинформТВ, а также на утреннем канале «Новый день».

В) В 1768 году численность населения Перми составляла 1630 чел., в 1852 году – 13 391 чел., в 1928 году – 84 805 чел., в 1939 году – 255 тыс. чел., в 1962 году – 701 тыс. чел., в 1973 году – 901 тыс. чел., в 1989 году – 1092,4 тыс. чел. (по данным архива Пермского края).

Г) Миграционный отток из Перми составил в 2005 году 8057 чел., в 2006 году – 7818 чел., в 2007 году – 7806 чел., в 2008 году – 6962 чел., в 2009 году – 6050 чел. За период с 1999 по 2009 год число выбывших составило 99 289 чел.

Д) В 2009 году количество преступлений на 10 тысяч населения в среднем по Пермскому краю составило 325,8; в Нижнем Новгороде – 394,4; в Казани – 262,2; в Челябинске – 285,0. По данным Росстата, за 2009 год в среднем по Российской Федерации количество преступлений на 10 тысяч человек составило 211.

Е) На начало 2010 года уровень обеспеченности населения общей площадью жилья составил 21,5 кв. м на одного жителя, что ниже аналогичного показателя городов-конкурентов. Челябинск – 23,4 кв. м/чел., Казань, Самара – 23,2 кв. м/чел., Нижний Новгород – 22,6 кв. м/чел., Екатеринбург – 22,8 кв. м/чел.

2.2. Проанализируйте данные таблицы

Динамика численности безработных

	Российская Федерация		**Пермский край**		**Пермь**	
	тыс. человек	**в % к предыдущему месяцу**	**человек**	**в % к предыдущему месяцу**	**человек**	**в % к предыдущему месяцу**
Январь	1609,0	101,2	35 638,0	104,4	6611,0	98,3
Февраль	1666,0	103,6	36 987,0	103,8	6580,0	97,8
Март	1643,0	98,6	35 659,0	96,4	6243,0	92,8
Апрель	1604,0	97,6	33 761,0	94,7	6037,0	89,8
Май	1515,0	94,4	30 848,0	91,4	5641,0	83,9
Июнь	1425,0	94,1	29 273,0	94,9	5267,0	78,3
Июль	1384,0	97,1	28 489,0	97,3	5219,0	77,6
Август	1327,0	95,9	26 824,0	94,2	4919,0	73,1
Сентябрь	1263,0	95,2	24 549,0	91,5	4727,0	70,3
Октябрь	1216,0	96,3	23 028,0	93,8	4610,0	68,6
Ноябрь	1223,0	100,6	24 145,0	104,9	4811,0	71,5
Декабрь	1286,0	105,1	26 621,0	110,3	5183,0	77,1

Ответьте на следующие вопросы:

1. В какой месяц число безработных было наименьшим в Перми, Пермском крае, РФ? Попробуйте объяснить, почему именно в это время снижается число безработных?

2. В какое время года число безработных по Перми наибольшее? Почему?

3. В какие месяца количественный показатель числа безработных по Пермскому краю больше, по сравнению с показателем по РФ? Почему?

2.3. Выполните анализ данных следующей таблицы

Информация о победителях заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников в 2010/11 учебном году

Предмет	**Фамилия, имя**	**Заключительный этап**	**Класс**	**МОУ**
Биология	Истомин Иван	Победитель	11	СОШ № 146
Информатика	Гордеев Алексей	Победитель	10	СОШ № 9
История	Аликин Павел	Победитель	11	Гимназия № 17
Литература	Гладышева Александра	Победитель	10	СОШ № 22
	Ибрагимова Карина	Победитель	10	СОШ № 7
Право	Зотеева Анна	Победитель	11	Лицей № 2
Обществознание	Блюмина Анна	Победитель	11	Гимназия № 8
Русский язык	Аликин Павел	Победитель	11	Гимназия № 17
	Шучалова Юлия	Победитель	11	Гимназия № 4
Экономика	Казанцев Дмитрий	Победитель	10	Гимназия № 17

Ответьте на следующие вопросы:

1) Какая школа подготовила наибольшее число победителей олимпиад?

2) В какой области знаний учащиеся имеют бóльшее число наград? Почему?

3) Учащихся каких классов больше среди победителей?

2.4. На диаграмме представлена динамика **оборота крупных и средних организаций в области образования и здравоохранения за 2011 г**. Ответьте на следующие вопросы, используя данные диаграммы:

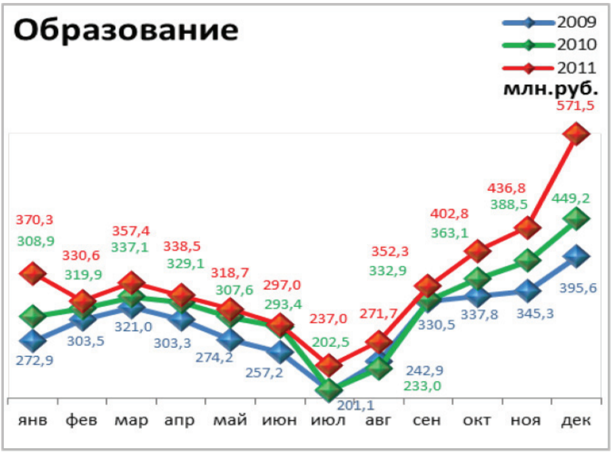
1) В какой период времени оборот был самым низким в образовании и здравоохранении? Почему? С какими социальными и экономическими процессами это связано?

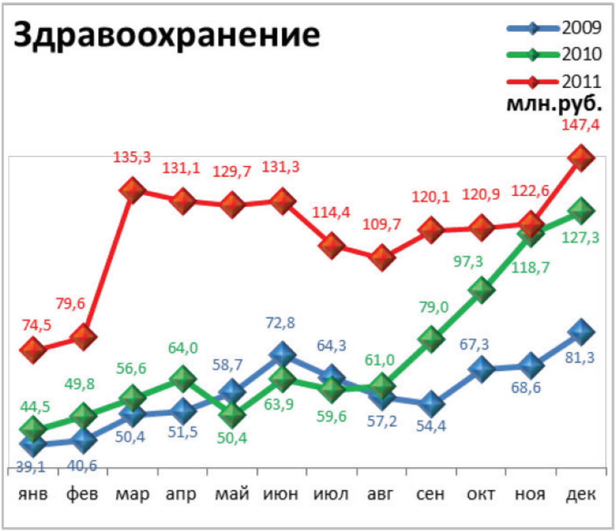
2) Одинакова ли тенденция спада и подъема оборота в каждой области по представленным годам?

3) В какой период времени идет рост оборота по отраслям? Почему? Насколько вырос оборот за последние три месяца года в 2009, 2010, 2011 годах в каждой отрасли? В каком году он максимальный?

4) Сколько периодов роста оборота (снижения оборота) можно выделить в каждой области? В какой период времени он происходит?

5) Определите рост оборота за год в каждой области. В каком году он был наибольшим, наименьшим?





Лабораторные работы в компьютерном классе

Лабораторная работа 1.

Таблицы, сортировка таблиц, вычисление в таблицах в редакторе Word

Задание 1. Создание таблиц.

Создайте журнал (таблицу) учета текущей успеваемости студентов вашей подгруппы по Основам обработки информации в сентябре и октябре следующего вида.

<u>Факультет</u>

Курс 1 *Название предмета* *Подгруппа*

№	*Ф. И. О.*	*Сентябрь*					*Октябрь*			
		2	**9**	**16**	**23**	**30**	**7**	**14**	**21**	**28**
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

<u>Ход работы:</u>

Для этого создайте новый документ, установите шрифт Times New Roman и размер 14. В первой строке введите название факультета, выровняйте по центру. Для набора следующей строки на линейке разместите символы табуляции в позиции 5,5 (выравнивание слева) и 14,4 (выравнивание справа) и установите размер 12. Введите «Курс 1», затем нажмите клавишу табуляции и введите название предмета, снова нажмите клавишу табуляции и укажите номер группы.

Выполните команду меню **Таблица/Добавить таблицу**, в диалоговом окне **Вставка таблицы** укажите число столбцов – 11 и число строк – 10.

Выделите столбцы с номерами 3–11 и выполните команду меню **Таблица/ Высота и ширина ячейки**. В диалоговом окне **Высота и ширина ячеек** установите ширину столбцов 3–11 равной 1,2 см, ширину столбца 2 – 3,8 см и ширину 1-го столбца равной 1 см.

Выделите две верхние ячейки первого столбца, выполните команду меню **Таблица/Объединить ячейки** и установите выравнивание по центру. Выполните эти действия, последовательно выделяя две верхние ячейки второго столбца, пять следующих ячеек первой строки и последние 4 ячейки первой строки.

Введите данные в соответствующие ячейки таблицы. При вводе заглавий «№» и «Ф. И. О.» для выравнивания их по вертикали использовать команды **Формат/Абзац** и в диалоговом окне **Абзаца** установить нужное значение поля **Интервал перед.** Для автоматического ввода значений в первый столбец воспользуйтесь командой **Формат/Список.**

Выделяя нужные области таблицы с помощью команды **Формат/ Границы и заливка** придайте таблице требуемый внешний вид.

<u>Задание 2.</u> Создание и сортировка таблиц.

1. Создайте таблицу следующего вида:

№ п-п	**Фамилия И.О.**	**Должность**	**Оклад**
1.	Сергеев В. В.	директор	20 000 000
2.	Петухов В. В.	водитель	2 000 000
3.	Петров В. В.	зам. директора	12 000 000
4.	Мишина В. В.	кассир	12 000 000
5.	Иванов В. В.	зам. директора	12 000 000
6.	Дубков В. Ф.	бухгалтер	15 000 000
7.	Веник В. В.	водитель	2 000 000
8.	Ванин В. В.	водитель	2 300 000
9.	Ванин В. П.	водитель	2 000 000
10	Сычев Т. Т.	водитель	2 300 000

2. Отсортируйте строки таблицы по фамилиям в алфавитном порядке.

<u>Ход работы:</u>

Для упорядочения таблицы проделайте следующие действия:

– выделите в таблице строки, начиная со второй, и столбцы, начиная со второго;

– выполните команду меню **Таблица/Сортировка**, в диалоговом окне **Сортировка** установите в списке **Сортировать** Столбец 2 (сортировка по 2-му столбцу), способ сортировки – **Текст**, нажмите кнопку **Параметры** и установите флажок **Только столбцы** (чтобы не переставлялись клетки с номерами строк) и нажмите кнопку **ОК**. Сохраните полученную таблицу в файле с названием *лаб.1-1-фамилия.doc*.

3. Отсортируйте строки таблицы по убыванию окладов и сохраните полученную таблицу в файле с названием *лаб.1-2-фамилия.doc*.

4. Отсортируйте строки таблицы по должностям и для одинаковых должностей по возрастанию окладов. Сохраните полученную таблицу в файле с названием *лаб.1-3-фамилия.doc*.

5. Соедините документы, записанные в файлы, в один документ. Для этого примените команду **Вставка/Файл.** Пронумеруйте таблицы в объединенном документе при помощи команды **Вставка/Название.**

6. Сохраните полученный документ в файле *Лабораторная_работа_1_фамилия.doc*.

<u>Задание 3.</u> Визитная карточка.

Визитная карточка – небольшой документ, в котором находится основная информация о владельце. В нее чаще всего заносят следующую информацию:

– Фамилию, имя, отчество владельца. В зависимости от страны и происхождения владельца, отчество может не указываться.

– Место работы (учебы) и должность (курс, группа).

– Домашний адрес.

– Рабочий и домашний телефоны, а также факс и адрес электронной почты, если они имеются.

Размер визитной карточки примерно 8 см по горизонтали и 5 см по вертикали. Структура визитной карточки приведена ниже:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Место работы (учебы)
Должность (курс, группа)
Фамилия
Имя и отчество</td></tr>
<tr><td>Домашний адрес</td><td align="right">Телефон раб.
Телефон дом.
Fax
E-Mail</td></tr>
</table>

<u>Ход работы:</u>

Создать визитную карточку можно следующим образом.

1. Создайте новый документ.
2. Вставьте таблицу из 2 строк и 2 столбцов.
3. Установите длину первого и второго столбцов равной 4 см.
4. Выделите первую строку таблицы и выполните команду «**Объединить ячейки**». В результате получится таблица, состоящая из трех ячеек 1, 2 и 3, следующего вида

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">1</td></tr>
<tr><td align="center">2</td><td align="center">3</td></tr>
</table>

5. Занесите в ячейку № 1 место работы, должность, фамилию, имя и отчество. В ячейку № 2 – домашний адрес, в ячейку № 3 – рабочий и домашний телефоны, факс и адрес электронной почты.
6. Подберите нужные шрифты и их размеры. Начертание фамилии должно выделяться по отношению к другой информации. Отцентрируйте текст в ячейке № 1, ячейку № 2 выровняйте по левому, а ячейку № 3 – по правому краю.
7. Выделите всю таблицу и выполните команды «**Формат, Границы и заливка**». В диалоговом окне выберите режим «Рамка», для того чтобы ваша визитка взялась в рамочку.

Визитка практически готова, но она занимает лишь небольшую часть листа формата А4. Разместим на листе 10 копий визитки в две колонки. Для этого:

1. Выполните команды «**Формат, Колонки»** и установите для листа две колонки для размещения текста.
2. Выделите таблицу и скопируйте ее в буфер обмена.
3. Установите курсор на одну строку ниже таблицы.
4. Вставьте содержимое буфера обмена (команды «**Правка, Вставить**»). Повторите эти действия пять раз. Если пятая копия не вмещается в первой ко-

лонке или в ней остается свободное место, измените размеры верхнего и нижнего полей страницы. Аналогично заполните правую колонку.

Задание 4. Вычисление в таблицах.

Ход работы

1. Подготовьте документ следующего вида:

Сведения

о доходах и расходах фирмы «Ритм» за январь – март 2007 г.

	Январь	**Февраль**	**Март**	**Сумма**
Объем продаж	45 000 000	50 000 000	48 000 000	143 000 000
Затраты на покупку	15 000 000	12 000 000	18 000 000	45 000 000
Затраты за доставку	6 000 000	8 000 000	10 000 000	24 000 000
Доход	24 000 000	30 000 000	20 000 000	74 000 000

Председатель правления
фирмы «Ритм» И. И. Иванов

2. Для вычисления сумм, расположенных в пятом столбце, необходимо при помощи команды **Таблица/Формула** ввести в клетки этого столбца формулы: =b2+c2+d2, =b3+c3+d3, =b4+c4+d4 или формулу: =SUM(LEFT).

Для вычисления доходов, расположенных в пятой строке, необходимо при помощи команды **Таблица/Формула** ввести в клетки этого столбца формулы: =b2–(b3+b4), =c2–(c3+c4), =d2–(d3+d4).

3. Сделайте обрамление и заливку клеток с исходными данными при помощи панели **Таблицы и Границы** или при помощи команды **Формат/Граница и заливка.** Измените числа в клетках с исходными данными и выполните перерасчет таблицы. Сохраните документ в файле.

Задание 5. Подготовьте рекламу следующего вида:

<table>
<tr><td>Ярмарка

Работает постоянно
с 11.00 до 19.00
воскресенье – выходной
вход свободный</td><td>Пермь, ул. Ленина, 4
ост. "ул. Горького"
тел. 266-97-24

2-й этаж-
УЧЕБНИКИ, ПОСОБИЯ, ПЛАКАТЫ
3-й этаж-
ВСЕ ДЛЯ ШКОЛЫ</td></tr>
<tr><td colspan="2">ВСЕ, ЧТО ВАМ СЕЙЧАС НУЖНО!</td></tr>
</table>

Ход работы:

Создайте таблицу, сделав невидимыми границы расположения информации, и клетки заполните нужной информацией в соответствующем формате.

Для фигурного текста примените объекты WordArt, кнопка для работы с которыми находится на панели **Рисование**.

Лабораторная работа 2.

Создание и редактирование диаграмм в документах Word

В состав Word входит программа создания диаграмм Microsoft Graph, включающая почти все возможности наиболее универсальной программы управления электронными таблицами Microsoft Excel. С помощью Microsoft Graph можно создавать высококачественные, информативные диаграммы и включать их в документы Word.

Создание диаграммы

Диаграммы строятся на основе данных, содержащихся в таблице данных, также внедряемой в документ Word. Созданная диаграмма связывается с таблицей данных, поэтому при изменении исходных данных диаграмма автоматически обновляется. Можно создавать диаграммы четырнадцати основных и двадцати дополнительных типов. Кроме того, внутри каждого из основных типов можно выбрать конкретный формат (подтип).

Например, таблица, отображающая данные по объемам продаж оргтехники

	Компьютеры	Модемы	Принтеры	Ксероксы
2002 год	12 000	10 000	11 000	10 000
2003 год	14 000	9000	12 000	9000
2004 год	14 000	8000	13 000	8000
2005 год	12 000	10 000	14 000	10 000

Если необходимо создать диаграмму на основе данных из таблицы, то нужно установить точку вставки в одну из ячеек таблицы и выбрать команду **Таблица, Выделить, Таблицу.** Выбрать команду **Вставка, Рисунок, Диаграмма.** Затем нажать **ОК.**

Если необходимо создать диаграмму на основе данных, набранных в документе и разделенных символами табуляции, то нужно выделить все эти данные, включая названия, которые будут использоваться в качестве меток легенды и названий категорий.

Редактирование таблицы данных

Работая с таблицей данных можно перемещаться, выделять ячейки, столбцы или строки, изменять ширину и т. д. При изменении исходных данных меняется и сама диаграмма. Чтобы изменить содержимое ячейки таблицы данных, нужно выделить ячейку и ввести новые данные. После нажатия клавиши Enter или перехода к другой ячейке таблицы все существующие в этой ячейке данные замещаются введенными данными.

Чтобы отредактировать содержимое ячейки, нужно выделить ее, а затем нажать клавишу F2 (переход в режим редактирования) или дважды щелкнуть по ней. Изменение содержимого ячейки ничем не отличается от редактирования обычного текста. После того как необходимые исправления произведены, нужно нажать клавишу Enter.

Можно также расширить или сузить набор данных, по которому строится диаграмма, путем добавления или удаления строк и столбцов таблицы данных. При этом диаграмма автоматически перестраивается с учетом внесенных в таблицу данных изменений. Чтобы вставить в таблицу строки или столбцы, нужно выделить необходимое число строк или столбцов и выбрать команду **Вставка, Ячейки.** Чтобы удалить из таблицы строки или столбцы, нужно их выделить, а затем выбрать команду **Правка, Удалить.**

Тип диаграмм

Правильный выбор типа диаграммы позволяет представить данные самым выигрышным образом. Тип диаграммы может быть применен не только ко всей диаграмме, но и к отдельному ряду данных на ней или к нескольким рядам. Комбинирование различных типов диаграмм позволяет разделить данные разного типа или выделить какой-то ряд данных, например, можно скомбинировать график с гистограммой.

Наиболее просто изменить тип всей диаграммы или только одного ряда данных с помощью команды **Диаграмма, Тип диаграммы.** В появляющемся окне можно выбрать не только тип, но и формат выбранного типа диаграммы.

Чтобы изменить тип диаграммы:

1. Нужно выбрать команду **Диаграмма, Тип диаграммы.** Появится диалоговое окно **Тип диаграммы.**
2. В этом диалоговом окне раскрыть вкладку **Стандартные** для выбора одного из основных типов диаграмм или вкладку **Нестандартные** для выбора одного из дополнительных типов диаграмм.
3. В списке **Тип** выделить нужный тип диаграммы.
4. Если выбрана вкладка **Стандартные**, то в галерее форматов **Вид** нужно выделить подтип диаграммы.
5. В конце необходимо нажать кнопку **ОК**, чтобы закрыть диалоговое окно и применить выбранный формат диаграммы.

Чтобы настроить существующий тип диаграммы:

1. Нужно выбрать команду **Диаграмма. Параметры диаграммы.** Появится диалоговое окно **Параметры диаграммы**, параметры в котором могут меняться в зависимости от типа диаграммы.
2. С помощью вкладок этого диалогового окна можно произвести настройку таких элементов диаграммы, как заголовки, оси, линии сетки, подписи данных и т. д.
3. После внесения необходимых изменений нажмите кнопку **ОК.**

Построение составных диаграмм

Составные диаграммы – это диаграммы, построенные с использованием одновременно двух или более типов диаграмм. На таких диаграммах некоторые ряды данных представляются с помощью одного типа диаграмм, а другие – с помощью другого. Например, можно построить один ряд в виде гистограммы, а второй – в виде графика, что облегчит сравнение рядов данных и поиск их возможных связей.

Созданную диаграмму можно сделать составной, изменить тип, используемый для построения одного или нескольких рядов данных. Для этого:

1. Выделить на диаграмме ряды данных, тип должен быть изменен, и выберите команду **Диаграмма, Тип диаграммы.**
2. В группе **Параметры** появившегося диалогового окна **Тип диаграммы** установите флажок **Применить.**
3. Выделите тип диаграммы для выделенного ряда данных и нажмите кнопку **ОК.**

К элементам диаграммы относятся маркеры, легенды, оси, метки, надписи и т. д. Они могут сделать диаграмму более эффектной и информативной.

Созданную диаграмму можно также отформатировать нужным образом, если выбрать соответствующую цветовую гамму, шрифт, сделать акцент на важных элементах, убрать лишние детали.

Форматирование любого объекта диаграммы осуществляется с помощью диалогового окна **Формат**. Чтобы открыть это окно:

1. Выделить нужный объект диаграммы, щелкнув по нему.
2. Выбрать команду **Формат, Выделенный объект**, либо просто дважды щелкнуть по объекту.

Вкладки появившегося диалогового окна содержат множество параметров форматирования, с помощью которых можно настроить отображение выделенного элемента «Форматирование» любого объекта диаграмм.

Задание 6. Построение диаграмм.

Ход работы:

Вызовите программу **Microsoft Graph** при помощи команды **Вставка/ Объект/ Microsoft Graph** или **Вставка/ Рисунок/ Диаграмма**. Если в буфере обмена не содержалась таблица, то программа вставляет демонстрационный пример, данные этого примера можно заменить на другие исходные данные. Ознакомьтесь с командами главного меню программы **Microsoft Graph**.

Задание 7.

По таблице «Сведения о доходах и расходах фирмы «Ритм»» построить диаграмму, отражающие динамику доходов и расходов фирмы «Ритм».

Сведения о доходах и расходах фирмы «Ритм» за январь – март

	Январь	Февраль	Март	Сумма
Объем продаж	45 000 000	50 000 000	48 000 000	143 000 000
Затраты на покупку	15 000 000	12 000 000	18 000 000	45 000 000
Затраты за доставку	6 000 000	8 000 000	10 000 000	24 000 000
Доход	24 000 000	30 000 000	20 000 000	74 000 000

Для этого скопируйте в буфер обмена необходимые строки исходной таблицы с заголовками строк и столбцов и вызовите команду **Вставка/ Рисунок/ Диаграмма.**

Задание 8. Постройте объемную круговую диаграмму для отображения доходов и расходов фирмы за март (столбец «Март») в процентном выражении.

Задание 9. Постройте плоскую круговую диаграмму для отображения доходов фирмы за первый квартал (строка «Доход») в стоимостном выражении.

<u>Задание 10.</u> Постройте различные типы диаграмм (гистограммы различных типов, линейчатые, графики, лепестковые, кольцевые) по данным таблицы о закупках вычислительной техники

	Компьютеры	**Модемы**	**Принтеры**	**Ксероксы**
2002 год	12 000	10 000	11 000	10 000
2003 год	14 000	9000	12 000	9000
2004 год	14 000	8000	13 000	8000
2005 год	12 000	10 000	14 000	10 000

<u>Задание 11.</u> Постройте объемную диаграмму о закупках компьютеров и принтеров в 2004 и 2005 годах. Для объемных диаграмм изучите изменение вида диаграммы.

<u>Задание 12.</u> Освойте редактирование параметров диаграммы (легенды, названия диаграммы, выделение сегментов диаграммы, ввод названий сегментов, изменение окраски сегментов и других элементов).

Постройте круговую диаграмму, отображающую закупку вычислительной техники в 2002 году. Сектор «Компьютеры» необходимо окрасить в красный цвет, «Принтеры» – в синий, «Модемы» – в зеленый, «Ксероксы» – в коричневый. На секторах укажите значение в процентах.

<u>Задание 13.</u> При помощи команды меню **Вставка/Название** пронумеруйте построенные диаграммы следующим образом: Диаграмма 1, Диаграмма 2 и т. д. Освойте редактирование названий.

Лабораторная работа «Табличный процессор Excel»

<u>Задание 14.</u> В диапазоне ячеек A1:E3 создайте копию приведенной ниже таблицы.

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Выравнивание</td><td rowspan="3">Текст</td><td rowspan="3">т
е
к
с
т</td><td rowspan="3">ТЕКСТ</td><td rowspan="3">ТЕКСТ</td></tr>
<tr><td>2</td><td>текста</td></tr>
<tr><td>3</td><td>в Excel</td></tr>
</table>

Введите необходимый текст в нескольких ячейках, предварительно объединив ячейки B1:B3, C1:C3, D1:D3, E1:E3, и расположите его различными способами в различных форматах.

Для объединения ячеек используйте режим отображения **объединение ячеек** вкладки **выравнивание** команды **Формат/Ячейки**.

Для направления текста в ячейках нужно выбрать нужную **ориентацию** вкладки **выравнивание** команды **Формат/Ячейки**

Для форматирования текста воспользуйтесь командой **Формат/ячейки/шрифт**, для задания границ – **Формат/ячейки/граница.**

Задание 15. Введите в одну ячейку A1 листа 2 предложение и отформатируйте следующим образом:

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПРОЦЕССОР

EXCEL

ПРЕДНАЗНАЧЕН ДЛЯ *ОБРАБОТКИ* ДАННЫХ, *представленных в* ТАБЛИЧНОЙ **ФОРМЕ**.

Для добавления новой строки в ячейку используется комбинация клавиш **ALT** + **ENTER**. Для расположения текста в ячейке в несколько строк также можно применить вкладку **выравнивание** команды **Формат/Ячейки** и установить флажок **Переносить по словам**.

Задание 16. На листе 3 постройте таблицу следующего вида:

		(текущая дата)	(текущее время)
Список студентов группы			
№ п/п	**Фамилия и. о.**	**Дата рождения**	**Средний балл**
1.	Иванов И. И.	12.05.1982	7,0
2.	Петров П. П.	23.07.1981	8,0
3.	Сидоров С. С.	01.12.1982	7,5
Средний балл группы 7.5			

Для объединения ячеек в 1-й, 2-й и последней строках необходимо выделить соответствующие ячейки и воспользоваться кнопкой ***объединить*** на панели инструментов.

Для ввода текущей даты необходимо нажать комбинацию клавиш

Ctrl ;

Для ввода текущего времени необходимо нажать комбинацию клавиш

Ctrl *Shift* ;

Для задания границ воспользуйтесь кнопкой ***Границы*** на панели инструментов.

Для задания заливки воспользуйтесь функциями вкладки **Вид** команды **Формат/ячейки** или кнопкой ***цвет заливки*** на панели инструментов.

Задание 17. На листе 4

a) Записать в ячейки A1–A12 названия всех месяцев года, начиная с января.

b) Записать в ячейки B1–G1 названия всех месяцев второго полугодия.

c) Записать в ячейки A13–G13 названия дней недели.

Ввести первое значение и воспользоваться маркером автозаполнения (маленький квадратик, расположенный в правом нижнем углу активной ячейки или выделенной области).

Примечание. Для работы в компьютерном классе со студентами, обучающимися на естественнонаучных факультетах, и студентами «продвинутого» уровня по информатике рекомендуется использовать пособия:

1. Информационные технологии в гуманитарном образовании: учеб.-метод. пособие / сост. Е. Б. Аликина, Т. Н. Катанова, Н. А. Ситникова. Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2008. – 71 с.
2. Лабораторный практикум по информатике: учебное пособие для вузов / В. С. Микшина, Г. А. Еремеева, Н. Б. Назина и др. Под ред. В. А. Острейковского. – М.: Высш. шк., 2003. – 376 с. Можно скачать на сайте: www.knigka.info
3. Лабораторные работы расположены на сайте http://comp-science.narod.ru. Дидактические материалы по информатике. Можно найти через Яндекс: Яндекс, поиск: лабораторный практикум по информатике, раздел «Дидактические материалы по информатике».

Рекомендуемая литература, интернет-источники

1. Балашова С. А., Лазанюк И. В., Аникина Н. К., Баранова Н. М., Дихтяр В. И. Математика и информатика. Учебное пособие. М.: Российский университет дружбы народов, 2009. – 192 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).
2. Библиотека научной и студенческой информации. http://www.bibliofond.ru/
3. Дидактические материалы по информатике. http://comp-science.narod.ru
4. Лабораторные работы для студентов. http://bsu.name/
5. Лабораторный практикум по информатике: учебное пособие для вузов / В. С. Микшина, Г. А. Еремеева, Н. Б. Назина и др. Под ред. В. А. Острейковского. www.knigka.info.
6. Лекции: диаграммы и графики. http://gendocs.ru/v17684/лекции_-_диаграммы_и_графики
7. Методическая копилка учителя информатики. Лабораторно-практические работы. http://www.metod-kopilka.ru/
8. Основные результаты деятельности образовательных учреждений города Перми за 2010/11 учебный год. http://www.gorodperm.ru
9. Учебные пособия и презентации по математике для студентов. http://www.resolventa.ru
10. Электронный учебно-методический комплекс по информатике. Лабораторный практикум по информатике. http://informatics.ssga.ru/

Р а з д е л 3.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РАБОТЫ С ИНФОРМАЦИЕЙ

Задания и вопросы для подготовки к занятию

1. Вспомните условное обозначение и состав основных числовых множеств, изучаемых в школьном курсе математики: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел.

2. Выясните, кто являлся создателем теории множеств.

3. Исключите лишние элементы из последовательностей. Обоснуйте свой выбор:

– Булгаков, Есенин, Лермонтов, Пушкин, Толстой, Шекспир;

– прыжки в длину, в высоту, с десятиметровой вышки, тройной прыжок;

– клубника, арбуз, вишня, яблоко, смородина;

– 22, 17, 180, 25 006, 6, 84.

Общие теоретические сведения

Одним из фундаментальных математических понятий является понятие *множества*. Множество – первичное понятие математики, т. е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Множество можно представить себе как соединение, совокупность, собрание некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку. Например, множество учащихся класса, множество букв алфавита, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество книг на полке.

Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, семья, деревья). Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита (A, B, C) или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$. Сами элементы некоторого множества обозначают малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений: $\{a, b, c, ...\}$.

Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).

Запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A, а выражение $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Основными способами задания множества являются:

1) перечисление всех его элементов: $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$;

2) описание (указание характеристического свойства его элементов). Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

Например, множество «хор» можно охарактеризовать как множество людей (или птиц), поющих вместе. Говоря о множестве четных чисел, мы указываем характеристическое свойство его элементов: $M = \{x \in N \mid x = 2n, n \in N\}$, т. е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

Элементы *конечного* множества можно перечислить, а элементы *бесконечного* множества даже теоретически нельзя собрать в законченную совокупность. Конечные множества можно задать как перечислением, так и с помощью характеристического свойства. Бесконечные множества задаются только с помощью характеристического свойства.

Мощность конечного множества – это количество элементов, которые принадлежат данному множеству, обозначается как *m(A)*, что означает мощность множества *A*. Например, если $A=\{a,b,c\}$, то $m(A)=3$. Если N – множество всех натуральных чисел, то $m(N)=\infty$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом Ø. Мощность пустого множества равна 0.

Множество *B*, состоящее из некоторых элементов данного множества *A* (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества. Иначе, если любой элемент множества *B* принадлежит также множеству *A*, то множество *B* называется подмножеством множества *A*. Это записывается так: $B\subset A$ или $A\supset B$. Говорят, что «*B* – подмножество *A*», или «*B* содержится в *A*», или «*A* содержит *B*». Заметим, что $m(B)\le m(A)$.

Знак «$\subset$» называется знаком включения.

Например, множество целых чисел $Z=\{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$ содержит все натуральные числа и числа, им противоположные $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,...\}$. Таким образом, $N\subset Z$.

Если в множестве *B* найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству *A*, то *B* не является подмножеством множества *A*: $B\not\subset A$.

Множества *A* и *B* называют равными ($A=B$), если $B\subset A$ и $A\subset B$. Например, множества $A=\{3,5,7,9\}$ и $B=\{7,3,9,5\}$ равны, так как состоят из одинаковых элементов.

В каждом отдельном случае мы рассматриваем всевозможные подмножества одного и того же множества. Например, в начальной школе дети учатся работать (выполнять основные арифметические операции) сначала с числами из первого десятка натуральных чисел, затем из первой сотни и т. д., но их действия не выходят за рамки натуральных чисел (отрицательные и дробные числа они будут проходить позже). Аналогично, учитель может работать с некоторыми группами учеников, которые будут являться подмножествами определенного множества обучаемых данным учителем школьников. Это основное множество (свое в каждом отдельном случае) называется универсальным множеством.

Универсальным множеством (обозначается *U*) называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются. При работе с числовыми множествами, если не дается дополнительных указаний, в качестве основного (универсального) множества будем считать множество R действительных чисел.

Для наглядного представления (графического изображения) множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться так называемыми *диаграммами Эйлера-Венна* (кругов Эйлера). На диаграммах Эйлера-Венна множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника. Элементы множества – точки внутри соответствующего круга (рис. 1).

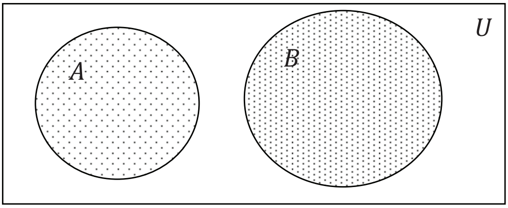


Рис. 1

Если множество B является подмножеством A, то круг, изображающий множество B, целиком помещается в круг, изображающий множество A (рис. 2). Равные множества представляют в виде одного круга (рис. 3).

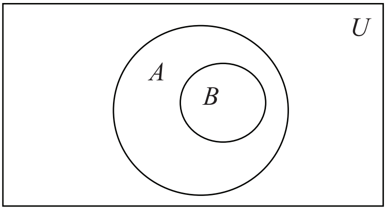


Рис. 2

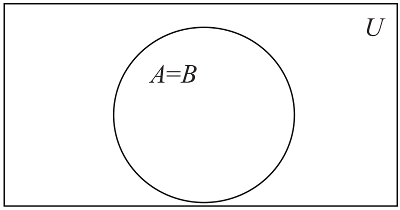


Рис. 3

В математике часто приходится решать задачи, которые связаны с нахождением общих элементов двух или более совокупностей или с объединением нескольких совокупностей в одну. Такие преобразования называются *операциями над множествами*.

Например, A – множество наклеек (марок), которые есть у Пети, B – множество наклеек, которые собрал Вася. Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят; коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе; множество наклеек Пети, которых нет у Васи. Таким образом, мы проделали операции *пересечения*, *объединения* и *разности* двух множеств.

Объединением (суммой) множеств $A \cup B$ называется множество C, все элементы которого принадлежат множеству A или множеству B.

Например, даны множества $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ и $\mathrm{B} = \{2, 3, 4\}$. Объединением данных множеств является $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, т. е. $\mathrm{C} = \{c \mid c \in A$ или $\mathrm{c} \in B\}$.

Если представить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится закрашенной областью (рис. 4).

Пересечением (произведением) множеств $A \cap B$ называется множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B (общих элементов).

Для множеств $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ и $\mathrm{B} = \{2, 3, 4\}$ пересечением является $C = A \cap B = \{2, 3\}$, т. е. $C = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}$ и $\mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$. Пересечение двух множеств изображают так, как это показано на рисунке 5.

Множества, не имеющие общих элементов $A \cap B = \varnothing$, называют непересекающимися (расчлененными).

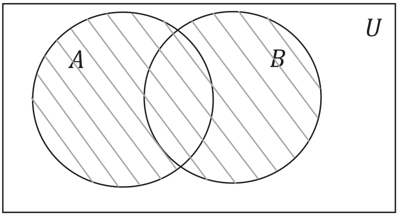


Рис. 4. Объединение множеств $A \cup B$

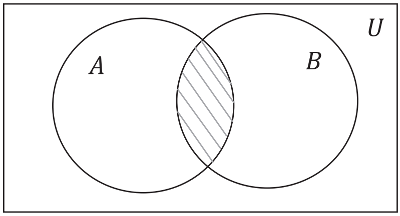


Рис. 5. Пересечение множеств $A \cap B$

Естественно поставить вопрос о нахождении числа элементов в *объединенном* множестве *C*. Если множества *A* и *B* не содержат одинаковых элементов, то $\mathrm{m}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{m}(\mathrm{A}) + \mathrm{m}(\mathrm{B})$.

В противном случае, когда множества имеют $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:

$$\mathrm{m}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{m}(\mathrm{A}) + \mathrm{m}(\mathrm{B}) - \mathrm{m}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Разностью множеств A \ B называется множество *C*, состоящее из всех элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*.

Например, даны множества $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ и $\mathrm{B} = \{2, 3, 4\}$. Разностью данных множеств является $C = A \setminus B = \{\,1\,\}$, т. е. $C = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ или } \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$.

Обратим внимание, что разность $C = B \setminus A = \{\,4\,\}$.

На рис. 6–7 представлены диаграммы Эйлера-Венна для операции разности множеств.

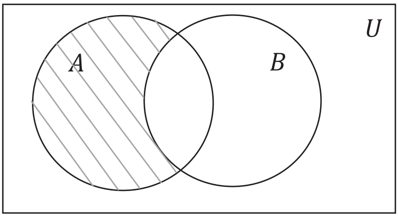


Рис. 6. Разность множеств A \ B

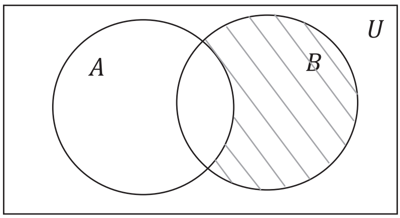


Рис. 7. Разность множеств B \ A

В случае, когда *B* является подмножеством *A*, т. е. $B \subset A$, разность A\B называется *дополнением* множества *B* до множества *A* (или относительно множества *A*). Дополнение обозначается $\overline{A}$ или *B′* и читается «не *B*» (рис. 8).

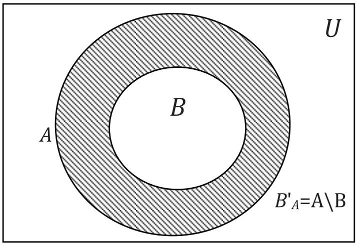


Рис. 8

Операции над множествами обладают следующими основными свойствами: коммутативности (для операций объединения и пересечения), ассоциативности (для операций объединения и пересечения), дистрибутивности (операции пересечения относительно объединения и операции объединения относительно пересечения).

Одним из способов конструирования новых объектов из уже имеющихся множеств является *декартово произведение множеств*. Рассмотрим следующую ситуацию. Фабрика детских игрушек выпускает плюшевых мишек, зайцев, собак, слонов следующих расцветок: розовый, синий, желтый, зеленый, коричневый. Обозначим через A множество видов изделий: А = {медведь, заяц, собака, слон}, через B – множество предлагаемых расцветок: B = {розовый, синий, желтый, зеленый, коричневый}. Посмотрим, какие игрушки можно получить, учитывая возможные для них расцветки. Для этого составим список всех пар из элементов множества A и элементов множества B таким образом, что сначала будем записывать элемент множества A, затем элемент множества B. Получим множество C упорядоченных пар элементов множеств A и B. Возможные изделия можно перечислить с помощью таблицы. Итак, мы имеем дело с особым множеством, составленным из элементов двух данных множеств. Такое произведение называется декартовым произведением двух множеств.

A / *B*	медведь	заяц	собака	слон
розовый	розовый медведь	розовый заяц	розовая собака	розовый слон
синий	синий медведь	синий заяц	…	синий слон
желтый	желтый медведь	…	…	…
зеленый	зеленый медведь	…	…	зеленый слон
коричневый	коричневый медведь	…	коричневая собака	…

Декартовым (или прямым) произведением множества A на множество B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента – элемент множества A, а вторая – элемент множества B. Обозначают $A \times B$.

Таким образом, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Для описания прямого произведения множеств бывает удобно использовать «геометрический язык». При этом элементы множества $A \times B$ называются точками. Например, если $z = (x, y)$, то $x \in A$ называется абсциссой, а $y \in B$ – ординатой точки z. На рис. 9 точками показаны элементы декартова произведения множеств $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ и $\mathrm{B} = \{4, 5, 6, 7\}$.

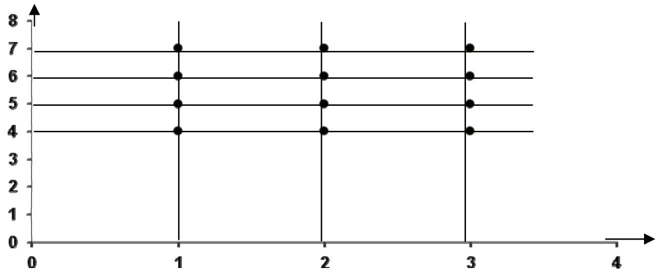


Рис. 9

Для нахождения общего числа элементов в декартовом произведении двух множеств можно воспользоваться следующим соотношением: если m(A)=n, m(B)=k, то m(A×B)= $n·k$.

В математике большую роль играет *теория отношений*, которая оказалась простым и удобным аппаратом для самых разнообразных задач. На ее основе обобщается понятие функции, применимое не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями. Центральное место занимают *бинарные отношения* – отношения, заданные на декартовом произведении двух множеств. Особо выделяются три типа бинарных отношений: эквивалентность, упорядоченность и толе-рантность, которые наиболее часто встречаются в практике.

Примеры решения основных типов задач

Пример 1. Способы задания множеств.

Определить способ задания множества A = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон}. Перейти к другому способу, если это возможно. Определить мощность множества.

Решение.

а) Перечислены все элементы множества A, следовательно, множество задано перечислением.

б) Любое множество можно задать с помощью характеристического свойства. Общим свойством элементов данного множества A является то, что все они буквы русского алфавита. Следовательно, с помощью характеристического свойства множество представимо как A={x | x – планета Солнечной системы}.

в) Общее число элементов множества A, множества планет Солнечной системы, равно 9, поэтому его мощность m (A) = 9.

Пример 2. Отношения между множествами.

Сравнить множество A с множествами B, C, D. Если множества пересекаются, найти их пересечения. Найти универсальное множество для данных множеств. Изобразить отношения между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

A = {красный, желтый, синий, зеленый}.

B = {красный, желтый}.

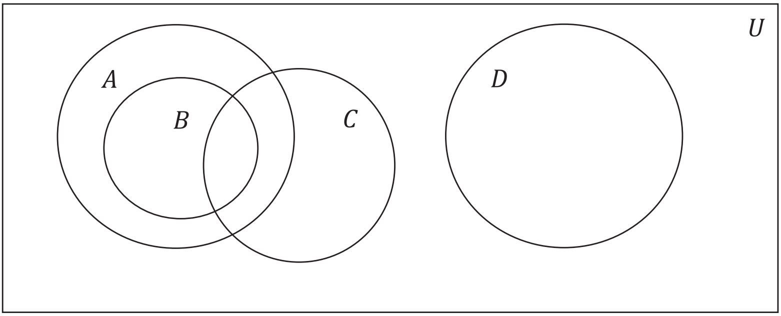
C = {желтый, синий, черный, оранжевый}.

D = {коричневый, голубой, розовый}.

Решение.

Все элементы множества *B* содержатся в множестве *A*, но не все элементы множества *A* являются элементами множества, поэтому $B \subset A$. $A \cap B =$ {красный, желтый}. $A \cap C =$ {желтый}. $A \cap D = \varnothing$.

U = {множество цветов}.



Пример 3. Операции над множествами.

Даны множества $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C = \{12, 13, 15, 16\}$, $D = \{0, 1, 20\}$. Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.

Решение.

Будем пользоваться определениями соответствующих операций и учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем уже объединение или разность. Получим:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\},\ C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\},$$

$$B \cap C = \{16\},\ A \cap D = \varnothing,\ A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\},\ D \setminus B = \{0, 20\},$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}, A \cap B \cap C = \varnothing,$$

$$B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\},\ A \cap C \setminus D = \{13,\ 15\}.$$

Пример 4. Подсчет количества элементов в объединении, пересечении и разности конечных множеств.

В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение.

Пусть *A* – множество туристов, знающих английский язык, *B* – множество туристов, знающих французский язык. По условию *m (A) = 70*, *m (B) = 45*. Туристы, знающие оба языка, образуют множество $A \cap B$, мощность которого $m\,(A \cap B) = 23$.

Объединенное множество – число туристов, знающих английский и (или) французский язык, можно найти по формуле:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92.$$

Туристы, не знающие ни английского, ни французского языка, составляют множество $\overline{A} \cap \overline{B}$. $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)} = 100 - 92 = 8$.

Пример 5. Декартово произведение множеств.

Перечислить все элементы декартова произведения множеств $A = \{-2, 1, 3\}$ и $B = \{-1, 0, 2, 5\}$.

Решение.

A×B={(-2,-1), (-2,0), (-2,2), (-2,5), (1,-1), (1,0), (1,2), (1,5), (3,-1), (3,0), (3,2), (3,5)}.

Задания для работы на занятии

3.1. Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.

3.2. Даны множества *A* – «натуральные числа», *B* – «четные числа», *C* – «числа, кратные пяти». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

3.3. Даны множества *A* – «натуральные числа», *B* – «четные числа», *C* – «числа, кратные шести». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера. Какие множества находятся в отношении включения?

3.4. Расположите следующие множества в порядке так, чтобы каждое следующее было подмножеством предыдущего: а) A, $A \cap B$, $A \cup B$; б) $A \cup B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap B \cap C$.

3.5. Даны множества *A* – «все первокурсники ПГГПУ», *B* – «первокурсники исторического факультета ПГГПУ», *C* – «первокурсники факультета информатики и экономики ПГГПУ». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

3.6. Даны множества *A* – «параллелограммы», *B* – «прямоугольники», *C* – «прямоугольные треугольники». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

3.7. Даны множества *A* – «отрезки», *B* – «прямые», *C* – «лучи». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

3.8. Найти множество, являющееся пересечением множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ и $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.

3.9. Найти множество, являющееся разностью множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ и $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.

3.10. Для данных множеств *A* и *B* найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $A \times B$:

а) $A = \{-2, 3\}$, $B = \{-3, 2\}$; б) $A = [-2; 3]$; $B = [-3; 2]$; в) $A = (0; 10)$; $B = (4; +\infty)$; г) $A = (-\infty; 3]$, $B = [-3; +\infty)$; д) $A = (-10; 20)$, $B = [-5; 10]$.

3.11. Найти множество $X = A \setminus B \cup C'$, если $A = (-4; 5)$, $B = [-10; 0)$, $C = (-\infty; 3)$. Верны ли следующие записи: $4 \in X$, $-3 \in X$, $21 \in X$, $0 \notin X$.

3.12. Найти множество $X = A \setminus (B \cap C)'$, если $A = (4; 15]$, $B = (-1; 10)$, $C = (-\infty; 3]$. Верны ли следующие записи: $1 \in X$, $-23 \in X$, $6 \in X$, $0 \notin X$.

3.13. Найти множество $X = A' \cup (B \setminus C)'$, если $A = [0; 12)$, $B = [-5; 5]$, $C=(2; +\infty)$. Верны ли следующие записи: $7 \in X$, $-5 \in X$, $10 \in X$, $0 \notin X$.

3.14. Показать на кругах Эйлера следующие множества:

а) $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (B \cap C)$;

б) $(A \cup C) \setminus (B \cap \overline{C})$;

в) $\overline{(A \setminus B)} \cap (C \cup B)$.

3.15. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на коньках, и на лыжах?

3.16. Экзамен по математике сдавали 250 учащихся, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 учащихся. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

3.17. Даны множества A = {a, e, f, d, k, l}, B = {b, c, e, d, k, m}. В результате какой операции над A и B получены множества C = {a, b, c, d, e, f, k, l, m}, D = {все буквы латинского алфавита}, E = {b, c, m}, F = {e, d, k}, G = {a, f, l}?

Вопросы для самопроверки

1. Что такое множество? Назовите способы задания множеств.
2. Как определить, принадлежит ли элемент множеству или нет?
3. Каким символом обозначается принадлежность, непринадлежность элемента множеству?
4. Как принято обозначать характеристику, связанную с количеством элементов множества?
5. Что такое универсальное множество?
6. Какие отношения существуют между двумя множествами? Какие условные записи соответствуют отношениям между двумя множествами?
7. Какие существуют операции над множествами? Какими символами обозначаются операции над множествами?
8. Как графически изображаются множества и операции над множествами?
9. Какими свойствами обладают операции над множествами?
10. Дайте определение декартову произведению множеств. Как найти общее число элементов в декартовом произведении множеств?

Задания для самостоятельной работы

3.18. Определить способ задания множества A = {Январь, Февраль, Март, Апрель, Май, Июнь, Июль, Август, Сентябрь, Октябрь, Ноябрь, Декабрь}. Перейти к другому способу задания множества, если это возможно. Определить мощность множества.

3.19. Даны множества A – «четные натуральные числа», B – «нечетные числа», C – «числа, кратные семи». Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

3.20. Найти множество, являющееся объединением множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ и $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.

3.21. Для данных множеств $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{B} = \{0, 2, 4, 6\}$ найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{\mathrm{A}}$, $A \times B$.

3.22. Сравнить множество A с множествами B, C, D. Сравнить множества B, C, D. Найти попарно пересечение множеств B, C, D. Найти универсальное множество для данных множеств. Изобразить отношения между множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$A = \{$a | a – студент ПГГПУ$\}$.

$B = \{$b | b – студент-филолог ПГГПУ$\}$.

$C = \{$c | c – студент-историк ПГГПУ$\}$.

$D = \{$d | d – студент первого курса ПГГПУ$\}$.

3.23. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос», составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

3.24. Изобразить на кругах Эйлера следующие множества:

а) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup (C \setminus B)$; б) $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$;

в) $(\mathrm{A} \cup B) \setminus (C \cap B)$; г) $(\mathrm{A} \cup B) \cup (\overline{C} \setminus B)$.

3.25. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

3.26. В школьной библиотеке содержатся книги с русскими текстами, книги с английскими текстами, некоторые книги содержат как английские, так и русские тексты. Известно, что из 590 книг в 500 есть тексты на русском языке, и в 100 книгах – английские тексты. Сколько книг содержат тексты как на русском, так и на английском языке? Сколько книг содержат тексты только на русском языке? Сколько книг содержат тексты только на английском языке?

3.27. Записать множества A и B, если известно, что $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(3;1), (-3;4), (0; 2), (1;3), (0;1), (5;7), (0;0), (5;5)\}$. Найти $A \cap B$, $B \setminus A$. Изобразить на координатной прямой элементы множества А, В. Сколько элементов содержится в каждом из рассмотренных множеств?

3.28. Даны множества А = {10, 26, 17, 34, 56, 84} и В = {2, 4, 28, 46}. В результате каких операций над множествами А и В получены множества С = {10, 26, 17, 34, 56, 84, 2, 4, 28, 46}, D – все натуральные числа, Е = {10, 26, 17, 34, 56, 84}, F = {2, 4, 28, 46}?

3.29. Доказать дистрибутивное свойство операции пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3.30. Доказать дистрибутивное свойство операции объединения относительно пересечения $A \cup (\hat{A} \cap \tilde{N}) = (\grave{A} \cup \hat{A}) \cap (\grave{A} \cup \tilde{N})$.

Рекомендуемая литература

1. Грес П. В. Математика для гуманитариев: учебное пособие. – М.: Логос, 2009. 288 с. (ЭБС «КнигаФонд», ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

2. Математика для гуманитариев: Учебник / Под общ. ред. д.э.н., проф. К. В. Балдина. – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2011. 512 с. (ЭБС «КнигаФонд»).

3. Стефанова Н. Л., Будаев В. Д., Яшин Е. Ю. Математика и информатика. – М.: Высшая школа, 2004. 349 с.

4. Основы высшей математики для юристов // http://posobie-mii.narod.ru/

5. Туганбаев А. А. Задачи и упражнения по высшей математике для гуманитариев. – М.: Флинта, 2011. 400 с. (ЭБС «КнигаФонд»).

6. Уткин В. Б., Балдин К. В., Рокосуев А. В. Математика и информатика. Учебное пособие. Под ред. Уткина В. Б. – М.: Дашков и Ко, 2011. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Раздел 4.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В НАУКЕ КАК СРЕДСТВО РАБОТЫ С ИНФОРМАЦИЕЙ, ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ

Вопросы для подготовки к занятию

1. Что понимают под фразами, когда говорят «модель обуви», «модель машины», «модель вселенной», «модель атома» и т. п.

2. Приведите примеры математических моделей. Поясните моделями «чего» они являются.

3. Как вы думаете, моделью какой практической ситуации может быть выражение 3 + 2?

4. С какими моделями вы встречались на уроках физики, математики, химии, русского языка, истории? Сравните их. Есть ли общие свойства у этих моделей?

Теоретические сведения и образцы решения основных типов задач

Термины «модель» и «моделирование» происходят от латинского слова modus, modulus – мера, образ, способ.

Под **моделью** понимают такой материальный или мысленно представленный объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект – оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования свойства и отношения. Например, модель жилого дома – это материальный объект (картон, гипс или др. материал), у которого сохранены следующие свойства – перпендикулярность стен относительно пола, параллельность пола и потолка и другие.

Модель может служить средством познания объекта, давать новые знания о нем в том случае, если она выступает своего рода мостиком, соединяющем исследователя с объектом познания. Выделяют следующие **функции модели**:

1) облегчает понимание устройства реального объекта: его структуры, основных свойств, законов развития и взаимодействия с окружающим миром;

2) способствует пониманию управления реальным объектом (или процессом) и определению наилучших способов управления им при заданных целях и критериях;

3) облегчает прогнозирование прямых и косвенных последствий реализации способов и форм воздействия на объект.

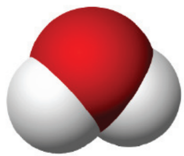
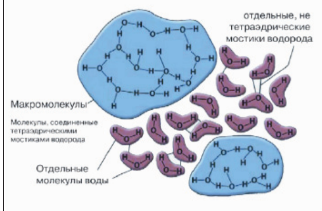
Моделирование – процесс создания, разработки моделей и их применения для познания новых свойств, новых качеств, новых адекватных по структуре или функциям объектов в определенной сфере деятельности человека. Сегодня моделирование является основным методом научного познания.

Модели и их виды

В основе общепризнанной классификации научных моделей лежит материалистическое понимание модели как средства отображения, воспроизве-дения той или иной части действительности с целью ее более глубокого познания.

Так, в зависимости от способа построения моделей, от средств, какими производится моделирование изучаемых объектов, все модели могут быть разделены на два класса: ***материальные*** (вещественные, реальные) и ***идеальные*** (мысленные, воображаемые).

Виды моделей

<table>
<tr><td colspan="6">МОДЕЛИ</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Материальные</u>
деревянные модели судов, металлические модели молекул и т. д.; живые модели, которые отобраны человеком в силу присущих им свойств, позволяющих в упрощенной форме имитировать изучаемый сложный процесс (специально выве-денные породы крыс)</td><td colspan="3"><u>Идеальные</u>
наглядные образы элементов, структуры и поведения объектов, фиксируются в виде рисунка, чертежа, схемы</td></tr>
<tr><th>пространственно подобные</th><th>физически подобные</th><th>математически подобные</th><th>образные</th><th>знаковые</th><th>образно-знаковые</th></tr>
<tr><td>сооружения, создаваемые для воспроизведения или отображения пространственных свойств или отношений объекта. Обязательное условие – геометрическое подобие модели и объекта.
Например, макеты зданий, пространственные модели кристаллов и молекул (пространственная модель ДНК)</td><td>объекты для воспроизведения динамики изучаемых процессов. Обязательное условие – физическое подобие модели и объекта, предполагающее одинаковость или сходство их физической природы и тождественность законов движения. Например, модель корабля испытывают в бассейне и по ходовым характеристикам модели определяют допустимый крен корабля, его скорость при разных режимах. В генетике в качестве модели для исследования проблем наследственности используют насекомое дрозофилу, ввиду большой скорости ее размножения</td><td>системы, не обладающие с объектом одной и той же физической природой и не сохраняющие с ним физического и геометрического подобия. Обязательное условие – структурная и функциональная аналогия между моделью и реальным объектом. Например, электрические модели механических, биологических и прочих явлений, структурные, цифровые и различные кибернетические функциональные модели</td><td>элементы модели – это образы каких-либо реальных, хорошо известных явлений, доступных непосредственному наблюдению,
и, во-вторых, некоторые свойства и отношения моделируемых явлений представлены в этих моделях в форме, доступной чувственности.
Эти модели часто фиксируются в виде рисунка, чертежа, схемы.
Например, рисунок молекулы воды
</td><td>элементы, отношения и свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков. Особенность таких моделей – это полное и принципиальное отсутствие сходства между элементами такой знаковой модели и соответствующими элементами объекта. Не обладает наглядностью в смысле какого бы то ни было сходства ее элементов с элементами объекта.
Например, структурные формулы в химии Н-О-Н</td><td>сочетание образных и знаковых моделей. Эти модели занимают промежуточное положение
</td></tr>
</table>

Приведем примеры моделей из различных научных направлений.

Выделенные из листьев хлоропласты. На выделенных системах часто изучают процессы, происходящие в живой системе, в этом смысле фрагмент является моделью целой живой системы. Выделение более простой системы позволяет исследовать механизмы процессов на молекулярном уровне. Говорят, что изученные на выделенном хлоропласте первичные процессы фотосинтеза являются моделью первичных процессов фотосинтеза в живом листе. К сожалению, этот метод фрагментирования приводит к тому, что «живой ковер жизни распускается по ниточкам, каждая ниточка досконально изучается, но волшебный рисунок жизни оказывается утрачен» (лауреат Нобелевской премии по биохимии Л. Поллинг).

Аквариум является примером физического моделирования. В аквариуме можно моделировать водную экосистему – речную, озерную, морскую, заселить ее некоторыми видами фито– и зоопланктона, рыбами, поддерживать определенный состав воды, температуру, даже течения и строго контролировать условия эксперимента. Какие компоненты естественной системы будут воспроизведены и с какой точностью, зависит от цели моделирования.

Популяция дрозофилы является классическим объектом моделирования микроэволюционного процесса и примером исключительно удачно найденной модели. Еще более удобной моделью являются вирусы, которые можно размножать в пробирке. Хотя не вполне ясно, справедливы ли эволюционные закономерности, установленные на вирусах, для законов эволюции высших животных.

Из приведенных примеров видно, что любая модель обладает конкретными свойствами физического объекта. В этом ее преимущества, но в этом и ее ограничения.

Компьютерные модели содержат «знания» об объекте в виде математических формул, таблиц, графиков, баз данных и знаний. Они позволяют изучать поведение системы при изменении внутренних характеристик и внешних условий, проигрывать сценарии, решать задачу оптимизации. Однако каждая компьютерная реализация соответствует конкретным, заданным параметрам системы. Наиболее общими и абстрактными являются математические модели.

Если удается сконструировать «хорошую» математическую модель, для ее исследования можно применить весь арсенал науки, накопленный за тысячелетия. Недаром многие классики независимо высказывали одну и ту же мудрую мысль: «Область знания становится наукой, когда она выражает свои законы в виде математических соотношений».

Математическое моделирование

Особую роль в науке играют **математические модели**, строительный материал и инструменты этих моделей – математические понятия. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые, с одной стороны, содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой – допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями, можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, систем уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явления, то есть его математическая модель. Математическое моделирование – один из наиболее экономичных, точных и эффективных методов теоретического анализа, обобщающего формулирования и экспериментально контролируемого описания объективных свойств и отношений реальности.

Процесс построения **математических моделей** реально функционирующих систем очень сложен. Построение такой модели оценивается как выдающееся открытие. Так, в 1952 г. англичане Ходжкин А. Л. и Хаксли Э. Ф. построили математическую модель, имитирующую распространение нервного импульса в живом организме. За это достижение они были удостоены Нобелевской премии в 1963 году. Предложенная модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих распространение нервного импульса. При этом оказалось, что модельные расчеты и полученные экспериментальные данные хорошо согласуются. Важность построенной модели для развития науки состояла в том, что, исходя из небольшого количества экспериментальных данных, оказалось возможным объяснить с единой позиции ряд явлений, которые ранее казались независимыми, а также предсказать новые. Вообще ценность модели заключается в том, что она описывает большой круг явлений на основании небольшого количества экспериментальных данных.

Например, равенство $n = \frac{(a-b)}{b} \cdot 100\%$ может быть моделью следующих задачных ситуаций:

1) средняя продолжительность жизни в России у мужчин 59 лет, у женщин – 71 год. На сколько процентов продолжительность жизни у женщин больше по сравнению с мужчинами?

$$n = \frac{(71-59)}{59} \cdot 100\% = 20\%$$

2. стоимость обучения за год составила 60 200 руб., учитывая инфляцию, второй год обучения стоил 62 000 руб. На сколько процентов увеличилась стоимость обучения?

$$n = \frac{(62000-60200)}{60200} \cdot 100\% \approx 3\%$$

3) средняя плотность ионов в атмосфере – 1400 ионов в см^3. Содержание отрицательных ионов – 600 ионов в см^3. На сколько процентов содержание положительных ионов больше, чем отрицательных?

$$n = \frac{(1400-600)}{1400} \cdot 100\% = 42\%$$

Математическое моделирование используется:

– для численного экспериментирования или численного оценивания в условиях, когда проведение реального эксперимента связано с большими затратами;

– для ознакомления, изучения и совершенствования новых объектов;

– для проверки или демонстрации новой идеи или метода;

– как средство планирования и прогнозирования.

Когда вы начали изучать геометрию (планиметрию), вы познакомились с геометрией Евклида – моделью окружающего нас мира, в которой все объекты состоят из простейших геометрических фигур: точек, прямых или их частей и плоскостей или их частей.

Требования к модели

С одной стороны, модель должна быть достаточно *полной,* то есть в ней должны быть учтены все факторы, от которых существенно зависит поведение исследуемого объекта. С другой стороны, модель должна быть достаточно *простой,* чтобы возможно было установление зависимости между параметрами, входящими в нее.

В зависимости от *математических понятий и методов,* которые используются для моделирования изучаемых явлений реальности, математические модели подразделяются: на функциональные; стохастические (вероятностные); алгоритмические; логико-математические; информационные; топологические.

Количество математических понятий, которое приходится использовать для описания модели некоторого явления, может служить мерой сложности этого явления.

Цель моделирования (как математической деятельности) – выделение комплекса свойств, присущих данному объекту или явлению, и описание их средствами математики.

Обычно модель записывается с помощью уравнений или неравенств. В результате изучения этих моделей часто возникают другие математические структуры.

Этапы математического моделирования

1. Постановка задачи, определение целей моделирования (исследовательской задачи, решение которой и должно быть получено посредством использования модели). Примеры формулирования целей: получение сведений об устройстве конкретного объекта, его структуре, свойствах, законах развития и взаимодействия; управление объектом; прогнозирование воздействия на объект.

2. Ранжирование свойств объекта – разделение его свойств по степени важности и влияния. Создание (выбор) модели.

3. Исследование модели (опосредованное изучение моделируемого объекта).

4. Сопоставление полученных данных с данными об оригинале.

5. Перенос знания (правила перевода высказываний о модели в высказывания об оригинале). Здесь возможно появление ошибок. Поясним каждый из выделенных этапов.

Пример. Изучить четырехэтажный учебный корпус.

Сформулированная таким образом цель не позволяет определить что-либо. Поскольку изучение объекта (в данном случае учебного корпуса) может проходить по нескольким, принципиально различным друг от друга направлениям. Например: 1) определить объем (площадь) учебных (служеб-ных) помещений в этом здании; 2) определить количество краски, которое потребуется для окраски стен всех лестничных площадок; 3) определить, можно ли построить такой же корпус на соседнем пустыре, если известны размеры пустыря (пренебрегая особенностями грунта).

Заметим, что в первом случае существенными характеристиками объекта будут размеры аудиторий в этом здании. При этом предполагаем, что все аудитории, одинаково расположенные, имеют одни и те же размеры. Заметим, что, пренебрегая возможными отклонениями в размерах аудиторий одного типа, мы уже закладываем погрешность результата.

Во втором случае существенными характеристиками будут размеры лестничных клеток.

А в третьем случае – размеры основания корпуса.

При составлении математической модели необходимо тщательно изучить само явление, установить характерные связи между величинами, его характеризующими, установить присущие ему основные свойства, которые следует учитывать при его изучении. Все это и определяет используемый матема-тический аппарат исследования, точность описания, глубину соответствия модели изучаемому явлению.

Построение любой математической модели начинается с абстрагирования. Процесс абстрагирования в математике имеет свои характерные особенности, отличающие его от аналогичного процесса в других науках, поскольку способы абстрагирования зависят от природы изучаемых объектов, характера и целей их изучения.

После того как модель составлена и принята, начинается собственно составление математической схемы применения избранного моделью математического аппарата. Чисто логическим путем составляются различного рода уравнения между числовыми характеристиками явлений, выводятся следствия. Далее проверяется соответствие модели исследуемому явлению.

Чаще рассматривается более **простая схема математического моделирования**:

– формализация (запись соотношений между исследуемыми величинами в виде математических равенств или неравенств);

– математизация (исследование полученного математического объекта математическими средствами);

– интерпретация (формулировка полученного результата в терминах исходной задачи).

Рассмотрим **решение экономической задачи**, с выделением этапов моделирования.

Задача: допустим, что все затраты фирмы определяются только расходами на оплату труда работников. Будем считать, что все остальные ресурсы не влияют на затраты фирмы. Еженедельный выпуск продукции зависит от количества нанятых рабочих следующим образом:

$Q(L) = -4L^2 + 760L$ (эта формула – модель процесса, которая была получена ранее). Недельная ставка нанятого рабочего составляет 80 усл. ед. Производимый товар фирма реализует на конкурентном рынке по цене 10 усл. ед. за единицу товара. Если фирма нанимает работников на конкурентном рынке труда, то сколько работников нужно нанять владельцу фирмы, чтобы получить максимальную прибыль? Какое количество продукции произведут эти работники за неделю?

Решение.

1-й этап – формализация.

Поскольку в данной задаче все издержки фирмы определяются только затратами на оплату труда рабочих, то общие издержки будут определяться формулой: $S(L)=80L$. Выражение для функции прибыли будет иметь вид: $R(L)=10(-4L^2 + 760L) - 80L = -40L^2 + 7520L$.

2-й этап – математизация.

Исследуем полученную функцию на наибольшее значение (максимальная прибыль). Поскольку функция квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом, то наибольшего значения она достигнет при $L=\frac{7520}{80}=94$ (в точке вершины параболы). При этом значение функции составляет $R(94)=353\,440$.

3-й этап – интерпретация.

Владельцу фирмы следует нанять 94 работников, которые за неделю будут производить 353 440 ед. продукции.

Задания для работы на занятии

4.1. Составьте схему, иллюстрирующую классификацию моделей. Можно ли ее рассматривать в качестве модели множества моделей, используемых в современной науке? Если да, то к какому виду моделей ее можно отнести?

4.2. Найдите примеры моделей, которые используются в различных науках (в вашей будущей профессиональной деятельности). Определите, к какому классу они принадлежат.

4.3. Как вы думаете, от чего зависит сложность математической модели? Приведите примеры математических моделей физических, химических, биологических процессов и явлений.

4.4. Как вы думаете, есть ли математические модели в таких областях, как педагогика, психология, филология? Приведите примеры различных моделей из этих наук.

Решите следующие задачи, составив математическую модель:

4.5. Каждый, кто ездил на поезде, слышал, как стучат колеса на стыках рельсов. С помощью этого ритмичного стука и часов можно определить скорость поезда. Как это сделать? (выразите скорость поезда через количество стуков n за минуту, если длина рельса 25 м)

4.6. Студент купил в магазине флакон 70%-ной уксусной кислоты и решил приготовить соус для пельменей, в котором используется 4%-ный уксус. Напишите формулу для расчета объема 4%-ного уксуса, который можно получить из объема V кислоты. Сколько надо взять кислоты и воды, чтобы получить пол-литра уксуса?

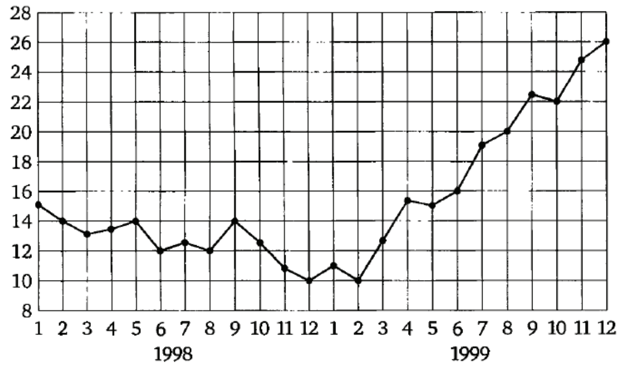
4.7. Заработная плата учителя составляет x руб., к которым начисляется 15%-ный «уральский коэффициент». Из общей суммы взимается 1% в пенсионный фонд и 2% профсоюзный взнос. Заработная плата облагается также 12,5%-ным подоходным налогом (кроме z руб., равных минимальной заработной плате). Составьте формулу для вычисления суммы, которую получит учитель.

4.8. При поступлении товара в магазин его цену повышают на 25%, по окончании сезона (или срока годности) цену понижают на 25%. Сколько процентов составила новая цена от первоначальной (при поступлении)?

4.9. В романе Жюля Верна «Дети капитана Гранта» читаем: «Погода стояла прекрасная, не слишком жаркая… Роберт узнал, что средняя годовая температура в провинции Виктория $+74^0$ по Фаренгейту». Сколько же будет в привычных для нас градусах Цельсия? Составьте формулу для вычисления температуры в градусах Цельсия, если известна температура по Фаренгейту. Найдите формулу для обратного перевода.

	T	F
Температура таяния воды	0^0	32^0
Температура кипения воды	100^0	212^0

4.10. На рисунке жирными точками показана среднемесячная цена нефти во все месяцы 1998 и 1999 годов. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки соединены линией.



Определите по рисунку:

а) какой была среднемесячная цена нефти в мае 1998 года (в долларах за баррель);

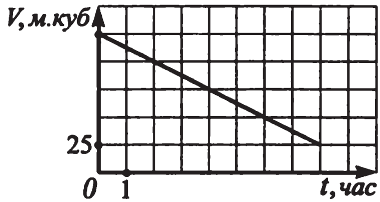
б) сколько раз за указанный в условии период среднемесячная цена нефти равнялась в точности 14 долларам за баррель;

в) во сколько раз среднемесячная цена нефти в августе 1998 года превосходила среднемесячную цену нефти в декабре 1998 года;

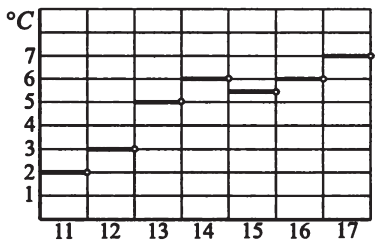
г) сколько раз среднемесячная цена нефти принимала наименьшее значение;

д) разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной ценой нефти в указанный период (в долларах за баррель).

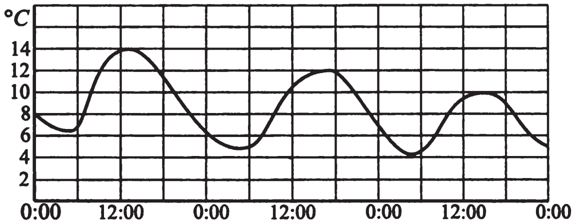
4.11. Из бассейна откачивают воду. На графике изображена зависимость объема воды в бассейне от времени, прошедшего с момента начала откачки воды. На оси асцисс откладывается время (в часах), прошедшее с момента начала откачки воды, на оси ординат – объем оставшейся в бассейне воды (в кубических метрах). Определите по графику, склько кубических метров воды было откачено из бассейна за первые 3 часа.



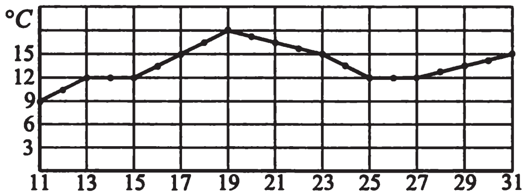
4.12. На рисунке показано изменение среднесуточной температуры в г. Казани в период с 11 по 17 марта 1983 г. По горизонтали указаны даты, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между максимальной и минимальной среднесуточной температурами (в градусах Цельсия) в период с 12 по 16 марта.



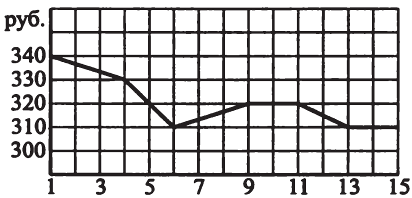
4.13. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 часов 1 октября. По горизонтали отмечается время суток, по вертикали – значение температуры воздуха в градусах Цельсия. Определите по рисунку, до какой наибольшей температуры (в градусах Цельсия) прогрелся воздух 3 октября.



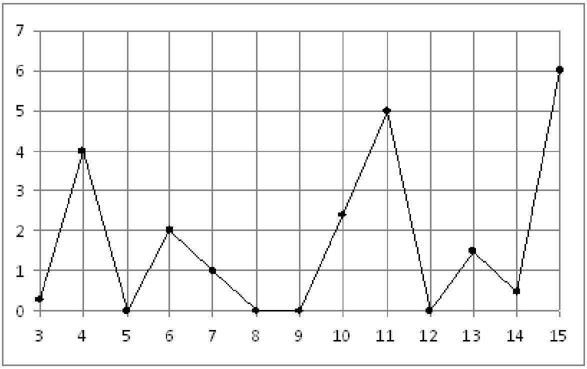
4.14. Посадку клубней картофеля рекомендуется проводить при дневной температуре воздуха не менее +15°C. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха с 11 по 31 мая (точки, указывающие значение температуры, для наглядности соединены линией). Определите, в течение скольких дней за этот период можно будет производить посадку картофеля, если прогноз окажется верным.



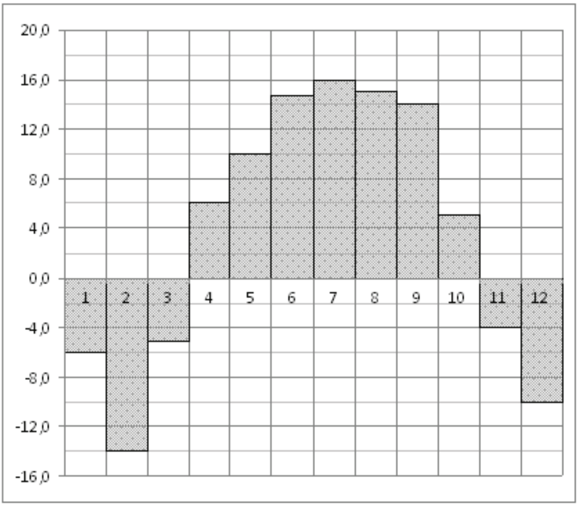
4.15. На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первой половине августа. 4 августа бизнесмен приобрел 200 акций этой компании. 120 акций он продал 10 августа, а остальные акции продал 12 августа. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



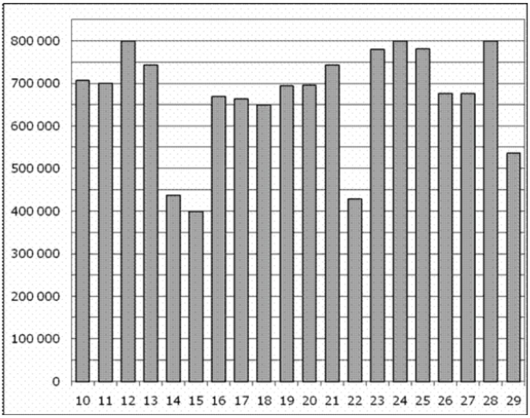
4.16. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 5 миллиметров осадков.



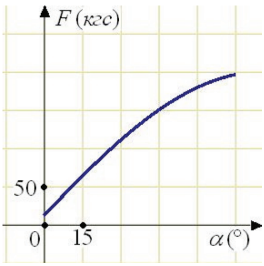
4.17. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



4.18. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали – количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости впервые приняло наибольшее значение.



4.19**.** В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортерной ленте. При проектировании транспортера необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортера. На рисунке изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортера к горизонту при расчетной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъема в градусах, на оси ординат – сила натяжения транспортерной ленты (в килограммах силы). Определите по рисунку, чему (в кгс) равна сила натяжения транспортерной ленты при угле наклона 45°?



4.20. Для доказательства или опровержения утверждений покажите их графические модели.

1) Через любые три точки проходит не более одной прямой.

2) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.

3) Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы равны.

4) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.

5) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 180^0, то эти две прямые параллельны.

6) Через любые две точки проходит более одной прямой.

7) Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.

8) Любые две прямые имеют не менее одной общей точки.

9) Если расстояние от точки до прямой меньше 1, то и длина любой наклонной, проведенной из данной точки к прямой, меньше 1.

4.21. Мальчик прошел от дома по направлению на восток 450 м. Затем повернул на север и прошел 240 м. На каком расстоянии (в метрах) от дома оказался мальчик?

4.22. Каждой из перечисленных ниже реальных ситуаций соотнесите график функции (а-з), который описывает ее.

Ситуация 1: на голове человека растут волосы, которые тот регулярно стрижет (x – время, прошедшее от одной из стрижек, y – длина определенного волоса).

Ситуация 2: через каждый час рабочего времени на склад сдают изготовленные детали (x – время работы, y – количество деталей на складе).

Ситуация 3: у человека есть деньги, которые он тратит на покупки (x – время, y – количество денег у гражданина).

Ситуация 4: яблоко растет, затем его срывают и сушат (x – время работы, y – масса яблока).

Ситуация 5: вода на поверхности озера в течение года (x – время, прошедшее с начала года, y – температура верхнего слоя воды).

Ситуация 6: мяч подняли над полом и выпустили из рук (x – время, y – высота мяча над полом).

Ситуация 7: растет апельсин, затем его срывают и сушат (x – время, y – масса апельсина).

Ситуация 8: конус погружают в воду вниз вершиной (x – глубина погружения; y – масса вытесненной воды).

Ситуация 9: конус погружают в воду вниз основанием (x – глубина погружения; y – масса вытесненной воды).

Ситуация 10: два тела A и B установлены на невесомой планке, которая имеет точку опоры O (рис.*). Тела находятся в равновесии (x – расстояние от B до точки O; y – масса тела B).

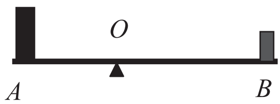
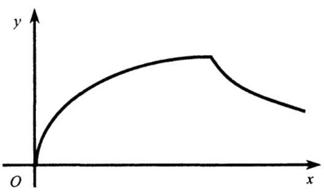
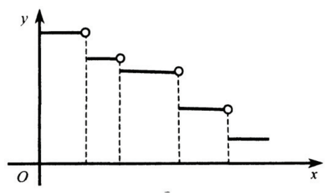
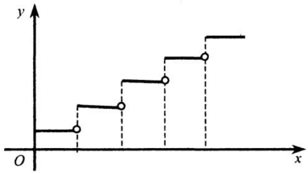


Рис.*

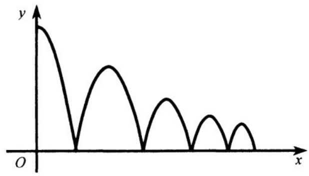
а) 

б) 

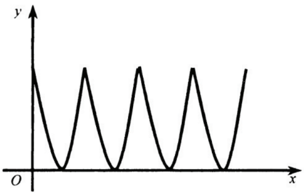
в)



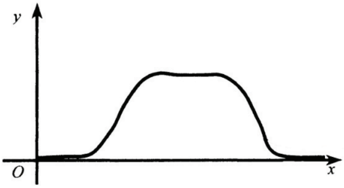
г)



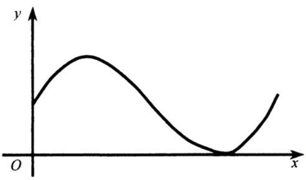
д)



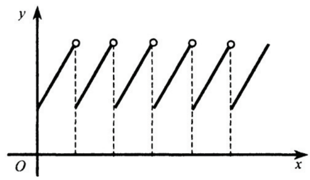
е)



ж)



з)



4.23. Длина автомобильного моста через Каму в Перми 1050 м (при 0^0C). Найдите зависимость его длины от температуры T окружающего воздуха. Как изменится длина моста, когда температура меняется от -20^0 до $+20^0$? Из курса физики вам известно, что тела при нагревании расширяются, при этом их линейные размеры увеличиваются и могут быть вычислены по формуле $L = L_0(1+\alpha T)$, где L_0 – длина тела при температуре 0^0C, T – температура в ^{0}C, α – коэффициент линейного расширения (для бетона он равен $12 \cdot 10^{-6}$), L – длина тела при температуре T.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки

4.24. Разъясните содержание понятий: модель и моделирование.

4.25. Чем отличаются представления о модели, которые используются в математике и естественных науках?

4.26. Назовите процессы из различных областей знаний, которые могут быть заданы с помощью формул: а) $y = kx$; б) $y = kx+b$; в) $y = kx^2$?

4.27. Почему числовой ряд Фибоначчи называют биологической моделью?

4.28. Расстояние между двумя шахтами A и B по шоссейной дороге 60 км. На шахте A добывается 200 т руды в сутки, на шахте B – 100 т в сутки. Где нужно построить завод по переработке руды, чтобы для ее перевозки количество тонно-километров было наименьшим?

4.29. Одна из формул, рекомендующих «идеальную» массу человека m, выраженную в килограммах, при данном его росте h (в см) $m = h - 105$. Постройте график этой функции. Найдите идеальную массу при росте 150 см, 160 см, 175 см.

4.30. Ежегодный прирост древесины на опытном участке составляет 10%. Какое количество древесины будет на участке через 10 лет, если сейчас ее 10^5 куб. м?

4.31. В Сбербанке РФ по программе «Достойная пенсия» вкладчику начисляется 20% от сданной на хранение суммы в год. Через сколько лет первоначальная сумма увеличится более чем в 2 раза, в 5 раз? Запишите зависимость суммы от срока хранения – математическую модель, если перво-начальный взнос x руб., срок вклада n лет. Изменится ли зависимость, если проценты начисляются ежегодно на новую сумму?

4.32. Температура T остывающего чайника с кипятком в момент времени t (мин) вычисляется по формуле $T = 20 + 80 : 2^{0,1t}$. Определите, какой температуры будет чайник через 10 мин, 20 мин, 30 мин, 1 ч?

4.33. В коттеджном поселке нужно провести водопровод длиной 167 м. Имеются трубы длиной 5 м и 7 м. Сколько нужно использовать тех и других труб, чтобы сделать наименьшее количество соединений (трубы не резать)?

Ответы к заданиям раздела 4: 4.6: $70V/4$, 29 мл, 471 мл; 4.7: $z + (1{,}5x - z)\cdot 0{,}88 - 1{,}15x\cdot 0{,}02 = 0{,}989x + 0{,}12z$; 4.8: 93,75%; 4.9: F= 32+1,8T, $23{,}3^0$.

Рекомендуемая литература

1. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П. В. Трусова. – М.: Логос, 2004. 440 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Р а з д е л 5.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ ПРИ РАБОТЕ С ИНФОРМАЦИЕЙ

Задания и вопросы для подготовки к занятию

1. Вы часто употребляете союзы «и», «или», «если… то…», «тогда и только тогда». Постарайтесь определить, в каких случаях вы их говорите. Чем будут отличаться фразы, содержащие союзы «и», «или»? Приведите примеры таких выражений.

2. Чем будут отличаться фразы, содержащие союзы «если… то…», «тогда и только тогда»? Приведите примеры таких выражений.

3. Выделите союзы в следующих выражениях и объясните, что они обозначают:

А) если в четырехугольнике: 1) противоположные стороны равны или 2) две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм;

Б) пишутся слитно наречия, если между предлогом-приставкой и существительным, из которых образовалось наречие, не может быть без изменения смысла вставлено определение (прилагательное, местоимение, числительное) или если к существительному не может быть поставлен падежный вопрос (бежать вприпрыжку, говорить наперебой, отказаться наотрез). Например: надеть фуражку набок – повернуться на бок (ср.: на правый бок); не видел отроду – двадцать лет от роду.

Теоретические сведения и образцы решения основных типов задач

Высказывания

<u>1. Понятие высказывания</u>

Любая научная теория воспринимается нами как некоторая система утверждений. Истинность каждого из них, вообще говоря, нуждается в доказательстве. В отдельных случаях такое доказательство может проводиться опытным путем, но чаще всего оно достигается с помощью логических средств. Именно эти логические средства и изучает раздел математики, называемый *математической логикой*. Исходным понятием математической логики является понятие высказывания.

Определение 1. *Высказыванием* называется предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Примеры.

1. Предложение «Снег – белый» есть истинное высказывание.

2. Предложение «Волга впадает в Средиземное море» – ложное высказывание.

3. Предложение «2+2=10» – ложное высказывание.

Далеко не всякое предложение является высказыванием. В частности, вопросительные и восклицательные предложения не относятся к высказываниям. Например, по поводу предложения «Который час?» не имеет смысла ставить вопрос, истинно оно или ложно; то же самое относится, скажем, к предложению «Мойте руки перед едой!» Не являются высказываниями и такие предложения, которые служат определениями чего-либо, например: «Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны».

Существуют предложения, которые безусловно являются истинными или ложными, однако в силу недостаточности наших знаний мы не можем в данный момент сказать точно, истинны они или ложны. Например, «Земля – единственная обитаемая планета во Вселенной» или «Всякое четное число есть сумма двух простых» (нерешенная до конца проблема теории чисел). Предложения такого типа мы также считаем высказываниями.

Из всех свойств высказывания нас будет в дальнейшем интересовать только одно: Истинно оно или ложно. Все же прочие свойства высказывания, например особенности его грамматической формы, смысловое значение отдельных слов и всего высказывания в целом, будут оставаться как бы вне поля зрения.

В дальнейшем будем обозначать высказывания заглавными буквами латинского алфавита: *P*, *Q*, *R* и т. д.

2. Значение истинности высказывания

Условимся каждому истинному высказыванию сопоставлять число 1, а ложному – число 0. Иначе говоря, введем на множестве всех высказываний функцию $\alpha(P)$, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, истинно высказывание P или ложно:

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, \text{ если высказывание } P \text{ истинно;} \\ 0, \text{ если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Определение 2. Число $\alpha(P)$ называется *значением истинности* высказывания *P*.

Так, для высказывания *P*: «В неделе 7 дней» $\alpha(P)=1$, а для высказывания *Q*: «Волга впадает в Средиземное море» $\alpha(Q)=0$.

Операции над высказываниями

Будем считать, что имеется некоторая первоначальная совокупность высказываний, называемых *элементарными* (или *исходными*). Исходя из этих высказываний, с помощью так называемых *логических операций* строят новые (сложные) высказывания.

Каждой логической связке сложного высказывания соответствует логическая операция, имеющая свое символьное обозначение (см. табл. 1).

Таблица 1

Условные обозначения логических связок

Связка	*Операция*	*Обозначение*	Правила *чтения*	*Пример* A – преподаватель ведет лекции, B – преподаватель ведет практику
Не	Отрицание	$\overline{A}$	**Не** A	$\overline{A}$ – преподаватель **не** читает лекции, $\overline{B}$ – преподаватель **не** ведет практику
И	Конъюнкция	$A \wedge B$	A **и** B	$A \wedge B$ – преподаватель читает лекции **и** (преподаватель) ведет практику
Или	Дизъюнкция	$A \vee B$	A **или** B	$A \vee B$ – преподаватель читает лекции **или** (преподаватель) ведет практику
Если… то…	Импликация	$A \Rightarrow B$	**Если** A, **то** B	$A \Rightarrow B$ – **если** преподаватель читает лекции, **то** он (преподаватель) ведет практику
…тогда и только тогда, когда	Эквиваленция	$A \Leftrightarrow B$	A **тогда и только тогда, когда** B	$A \Leftrightarrow B$ – преподаватель читает лекции **тогда и только тогда, когда он** (преподаватель) ведет практику

1. Отрицание высказывания

Определение 1. *Отрицанием* высказывания P называется новое высказывание, обозначаемое $\overline{P}$ (читается: «Не P» или «Неверно, что P»), которое считается истинным, если высказывание P ложно, и ложным, если P истинно.

Иначе говоря, значения истинности высказываний P и $\overline{P}$ связаны между собой, как указано в следующей таблице:

$\alpha(P)$	$\alpha(\overline{P})$
1	0
0	1

Эта таблица читается по строкам. Например, первая строка под горизонтальной чертой означает: если $\alpha(P)=1$, то $\alpha(\overline{P})=0$. Приведенная таблица называется *таблицей истинности для отрицания*.

2. Конъюнкция высказываний

Определение 2. *Конъюнкцией* высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ (читается «P и Q»), которое считается истинным, если истинны оба высказывания P и Q, и ложным во всех остальных случаях.

Таким образом, значение истинности высказывания $P \wedge Q$ связано со значениями истинности высказываний P и Q. Эта связь выражается таблицей:

$\alpha(P)$	$\alpha(Q)$	$\alpha(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Приведенная таблица называется *таблицей истинности для конъюнкции.*

Данное выше определение конъюнкции вполне отвечает тому смыслу, который придается в рассуждениях союзу «и». Действительно, привычная логика рассуждений требует, чтобы утверждение «P и Q» было истинно лишь в одном случае: когда истинны оба утверждения P и Q.

Например:

1. Высказывание «Число 2 четное и простое» является конъюнкцией высказываний: «Число 2 четное» и «Число 2 простое». Так как оба последних высказывания истинны, то истинна и их конъюнкция.

2. Высказывания «2 меньше 5» и «5 меньше 10» истинны, поэтому истинна и их конъюнкция «2 меньше 5 и 5 меньше 10». Последнее высказывание записывают обычно так: «2<5<10».

3. Дизъюнкция высказываний

Определение 3. *Дизъюнкцией* высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается «P или Q»), которое истинно в тех случаях, если истинно хотя бы одно из высказываний P или Q, и ложно, если ложны оба высказывания P и Q.

Значение истинности высказывания $P \vee Q$ связано со значениями истинности высказываний P и Q с помощью таблицы:

$\alpha(P)$	$\alpha(Q)$	$\alpha(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Эта таблица называется *таблицей истинности для дизъюнкции*.

Приведенное определение дизъюнкций вполне отвечает обычному употреблению союза «или». Действительно, в практике рассуждений утверждение «P или Q» считается верным в любом из случаев, когда верно P или Q; если же оба утверждения P и Q неверны, то неверно и «P или Q».

Например:

1. Высказывание «В неделе 10 дней или в году 12 месяцев» является дизъюнкцией двух высказываний: «В неделе 10 дней» и «В году 12 месяцев». Несмотря на кажущуюся странность такого высказывания, мы все же признаем его истинным, поскольку истинно одно из составляющих его высказываний («В году 12 месяцев»).

2. Высказывание «2<3» является дизъюнкцией высказываний «2<3» и «2=3», из которых первое истинно, а второе ложно. Следовательно, истинна и сама дизъюнкция.

4. Импликация высказываний

Определение 4. *Импликацией* высказываний *P* и *Q* называется высказывание, обозначаемое $P \Rightarrow Q$ (читается: «Если *P*, то *Q*», или «Из *P* следует *Q*», или «*P* влечет за собой *Q*»), которое ложно лишь в том случае, если *P* истинно, а *Q* ложно. *Таблица истинности для импликации* имеет вид

$\alpha(P)$	$\alpha(Q)$	$\alpha(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Данное выше определение импликации в основном отражает тот смысл, который придается в обычных рассуждениях связке «если... то...». Единственное возражение может вызвать, пожалуй, лишь та строка таблицы, где $\alpha(P)=0$, $\alpha(Q)=1$, $\alpha(P \Rightarrow Q)=1$. Однако с таким пониманием импликации приходится все же согласиться, поскольку принцип «Из лжи следует что угодно» представляется вполне оправданным.

Заметим, что при рассмотрении импликации $P \Rightarrow$Q высказывание *P* называют *посылкой* (или *условием*) импликации, а высказывание *Q* – ее *заключением* (или *следствием*).

Например:

1. Высказывание «Если Земля круглая, то 2·2=4» является импликацией высказываний «Земля круглая» и «2·2=4». Оно истинно, так как истинны оба последних высказывания.

2. Высказывание «Если 2·2=5, то число 5 – простое» есть импликация высказываний «2·2=5» и «5 – простое». Оно истинно, поскольку посылка «2·2=5» – ложное высказывание.

5. Эквивалентность высказываний

Определение 5. *Эквивалентностью* (или *эквиваленцией*) высказываний *P* и *Q* называется новое высказывание, обозначаемое $P \Leftrightarrow Q$ (читается «*P* эквивалентно *Q*», или «*P* тогда и только тогда, когда *Q*»), которое истинно в том и только в том случае, если *P* и *Q* одновременно истинны или одновременно ложны.

Таблица истинности для эквивалентности выглядит следующим образом:

$\alpha(P)$	$\alpha(Q)$	$\alpha(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например:

1. Высказывание «2·2=4 тогда и только тогда, когда Земля – шар» представляет собой эквиваленцию двух высказываний: «2·2=4» и «Земля – шар». Оно истинно, поскольку истинны оба этих высказывания.

2. Высказывание «Небо синее в том и только в том случае, когда снег черный» является эквиваленцией высказываний «Небо синее» и «Снег черный». Оно ложно, так как одно из двух последних высказываний истинно, а другое ложно.

6. Логические операции как операции на множестве $\{0,1\}$

Рассмотрим любую из логических операций, например операцию конъюнкции $\wedge$. Поскольку число $\alpha(P \wedge Q)$ полностью определяется числами $\alpha(P)$ и $\alpha(Q)$, мы можем оперировать не с высказываниями, а с числами 0 и 1, определив конъюнкцию над ними с помощью таблицы

$$1 \wedge 1 = 1,$$
$$1 \wedge 0 = 0,$$
$$0 \wedge 1 = 0,$$
$$0 \wedge 0 = 1.$$

Аналогичные замечания можно сделать и по отношению к остальным логическим операциям.

Например, $\bar{1} = 0,\ \bar{0} = 1,\ 1 \vee 0 = 1,\ 0 \Rightarrow 0 = 1$ и т. д.

Таким образом, каждой логической операции над высказываниями соответствует некоторая функция, определенная на двухэлементном множестве $\{0,1\}$ и принимающая значения в том же множестве. Эту функцию мы будем называть тем же термином (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция и т. д.), что и соответствующую логическую операцию.

Формулы алгебры высказываний

1. Определение и примеры формул

С помощью логических операций, рассмотренных в предыдущем параграфе, можно, исходя из простейших высказываний, строить новые, более сложные. Например, исходя из высказываний *P*: «Пушкин – русский поэт», *Q*: «Гаусс – немецкий математик», *R*: «2·2=4», можно построить новое высказывание: «Если Пушкин – русский поэт и Гаусс – немецкий математик, то 2·2=4». Это новое высказывание имеет вид

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R. \tag{1}$$

Выражение (1), если отвлечься от конкретного смысла высказываний *P*, *Q*, *R*, можно рассматривать как некоторую схему, позволяющую, исходя из любых высказываний *P*, *Q*, *R*, строить новое высказывание. Именно такие схемы и будут нас сейчас интересовать. Они называются *формулами алгебры высказываний*. Мы, конечно, привыкли к несколько другому толкованию понятия «формула»; для нас формулы – это равенства типа $S=\pi r^2$ (формула площади круга), $a^2+b^2=c^2$ (формула, выражающая теорему Пифагора) и т. д. Тем не менее выражение $(P\wedge Q)\Rightarrow R$ также можно рассматривать как своего рода формулу – формулу конструирования составного высказывания из более простых.

Прежде чем дать общее определение формулы алгебры высказываний, условимся о нижеследующем. *Высказывательными переменными* будем называть такие переменные, которые могут принимать в качестве своих значений любые конкретные высказывания. Будем обозначать такие переменные заглавными латинскими буквами *X, У, Z, U, V, ...*, или теми же буквами с индексами: $X_1, X_2, \ldots$ Введем, кроме того, еще две специфические высказывательные переменные И и Л; вместо первой можно подставлять любое истинное высказывание, вместо второй – любое ложное.

Полное описание понятия формулы дают следующие соглашения:

1°. Каждая отдельно взятая высказывательная переменная есть формула.

2°. Если F_1 и F_2 – две формулы, то выражения $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $(F_1\wedge F_2)$, $(F_1\vee F_2)$, $(F_1\Rightarrow F_2)$, $(F_1\Leftrightarrow F_2)$ также являются формулами.

3°. Не существует никаких других формул, кроме тех, которые получаются в результате применения конечного числа раз пп. 1° и 2°.

Так, например, формулами являются следующие выражения: $\overline{X}$, $(X\wedge Y)$, $\left(\overline{X\vee Y}\right)$, $((X\Rightarrow Y)\Rightarrow Z)$ и т. д.

Для большей отчетливости укажем примеры выражений, не являющихся формулами: XY, $(X\Rightarrow)\vee Y$, $X\wedge Y$.

То, что мы не признаем формулой последнее из написанных выражений, может вызвать сначала недоумение. Однако если строго следовать данному выше определению, то выражение $X\wedge Y$ – не формула; чтобы стать формулой, ему не хватает скобок, так как, согласно п. 2°, формулой должно быть выражение $(X\wedge Y)$, а не $X\wedge Y$. Различие между выражениями $X\wedge Y$ и $(X\wedge Y)$ станет особенно существенным, если мы включим выражение $X\wedge Y$ в качестве составляющей части в более сложную формулу: сравните, например, выражение $((X\wedge Y)\Rightarrow Z)$, являющееся формулой, с выражением $X\wedge Y\Rightarrow Z$ (не формулой); неясно, как следует понимать второе выражение (какая операция следует за какой: $\wedge$ после $\Rightarrow$ или $\Rightarrow$ после $\wedge$?).

Итак, *запись внешних скобок у формулы будем считать необязательной, если только эта формула не входит составной частью в более сложную формулу.*

2. Таблицы истинности для формул

Рассмотрим какую-нибудь формулу алгебры высказываний, например $(X\wedge Y)\Rightarrow Z$. Обозначим эту формулу сокращенно *F(X, У, Z)*. Значение истинности формулы *F(X, У, Z)* полностью определяется значениями истинности переменных *X, У, Z*. Это обстоятельство позволяет составить таблицу, дающую значение истинности для *F(X, У, Z)* в зависимости от значений истинности для *X, У, Z*. Такая таблица должна состоять из четырех столбцов: трех – для переменных *X, Y, Z* и одного – для самой формулы. Так как каждая из переменных *X, У, Z* может принимать два значения (1 или 0), то для тройки *X, У, Z* получается 2·2·2=8 различных возможностей. Это означает, что таблица должна иметь 8 строк. Для заполнения последнего столбца таблицы подставляем значения *X, У* и *Z* в формулу *F(X, У, Z)*. Например, при $X = 1$, $У = 1$, $Z = 1$ имеем

$$F = (1 \wedge 1) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1,$$

при $X = 1$, $У = 1$, $Z = 0$ находим

$$F = (1 \wedge 1) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0,$$

и т. д. В результате заполнения получаем следующую таблицу:

X	Y	Z	$(X \wedge Y) \Rightarrow Z$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Вообще, для каждой формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ алгебры высказываний можно составить таблицу, дающую значение истинности формулы в зависимости от значений истинности переменных $X_1, X_2, ..., X_n$. Такая таблица называется *таблицей истинности для формулы* $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Процедуру составления таблицы истинности можно упростить, используя некоторые приемы. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример. Составить таблицу истинности для формулы

$$(X \vee Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y})$$

(в силу принятого соглашения внешние скобки у формулы опущены).

Первый шаг заключается в установлении последовательности операций. Для этого над знаком каждой логической операции, встречающейся в формуле, ставим номер, означающий очередность выполнения этой операции. В данном случае возможна, например, такая нумерация: $\left(X \overset{1}{\vee} Y\right) \overset{5}{\Leftrightarrow} \left(\overset{2}{\overline{X}} \overset{4}{\Rightarrow} \overset{3}{\overline{Y}}\right)$.

В первой (заглавной) строке таблицы запишем *X, У*, а также данную формулу. Под переменными *X* и *У* выписываем всевозможные наборы их логических значений. Тогда получим таблицу

X	Y	$\left(X \overset{1}{\vee} Y\right) \overset{5}{\Leftrightarrow} \left(\overset{2}{\overline{X}} \overset{4}{\Rightarrow} \overset{3}{\overline{Y}}\right)$
1	1	1 1
1	1	0 0
1	0	1 1
1	0	1 0

которую продолжаем заполнять дальше. Под номером 1 запишем значения, принимаемые формулой $(X \vee Y)$, для соответствующих значений X и $У$. Затем точно так же заполняем столбцы под номерами 2, 3, 4, 5. В результате получаем следующую таблицу:

X	Y	$\left(X \overset{1}{\vee} Y\right) \overset{5}{\Leftrightarrow} \left(\overset{2}{\overline{X}} \overset{4}{\Rightarrow} \overset{3}{\overline{Y}}\right)$
1	1	1 1 1 1 0 1 0
1	1	0 1 0 1 0 1 1
1	0	1 1 1 0 1 0 0
1	0	1 0 0 0 1 1 1

Столбец под номером 5 (полученный последним) дает значения истинности данной формулы.

3. Тавтологии

Определение 1. Формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ алгебры высказываний называется *тождественно истинной* (или *тавтологией*), если ее значение истинности равно 1 при любых значениях истинности для $X_1, X_2, ..., X_n$.

Роль тавтологий прежде всего заключается в том, что они дают схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний.

Например, тавтологией является формула $X \vee \overline{X}$ («X или не X»). Действительно, какое бы конкретное высказывание ни было подставлено вместо X, высказывание $X \vee \overline{X}$ истинно, поскольку $1 \vee 0 = 1$ и $0 \vee 1 = 1$.

Однако значение тавтологий состоит не только в том, что с их помощью строятся истинные высказывания; не меньшее значение имеет и то, что *тавтологии дают правильные способы умозаключения*. Проиллюстрируем это на примере формулы $\left(\left(\overline{X} \Rightarrow Y\right) \wedge \left(\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}\right)\right) \Rightarrow X$.

Эта формула является тавтологией, что легко проверяется, если составить для нее таблицу истинности (в столбце значений для всей формулы окажутся одни единицы). Схема логического умозаключения, выражаемая этой тавтологией, часто используется в математике: эта схема носит название «доказательство от противного». А именно, пусть требуется доказать некоторое утверждение X. Рассуждаем так: допустим, что X неверно (т. е. что верно $\overline{X}$). Далее с помощью некоторого рассуждения (в рамках той теории, которая изучается) доказываем, что из $\overline{X}$ следует некоторое утверждение Y, а также, что из $\overline{X}$ следует противоположное утверждение $\overline{Y}$. Так как одновременная справедливость утверждений $\overline{Y}$ и Y невозможна, то из проведенного рассуждения делаем вывод о справедливости (истинности) X.

Укажем некоторые особо важные тавтологии.

1. Законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$(X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X), \quad (X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X).$$

2. Законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$((X \wedge Y) \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z)), \quad ((X \vee Y) \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z)).$$

3. Законы дистрибутивности:

$$(X \wedge (Y \vee Z)) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)), \ (X \vee (Y \wedge Z)) \Leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)).$$

4. Законы де Моргана: $\left(\overline{X \wedge Y}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{X} \vee \overline{Y}\right), \quad \left(\overline{X \vee Y}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{X} \wedge \overline{Y}\right).$

5. Закон исключенного третьего: $X \vee \overline{X}$.

6. Закон контрапозиции: $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow \left(\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}\right)$.

7. Правило цепного заключения (закон силлогизма):

$$((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z).$$

8. Правило «модус поненс»: $(X \wedge (X \wedge Y)) \Rightarrow Y$.

9. Схема доказательства «от противного»: $\left(\left(\overline{X} \Rightarrow Y\right) \wedge \left(\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}\right)\right) \Rightarrow X$.

Доказательство того, что каждая из указанных формул является тавтологией, провести самостоятельно в качестве упражнения.

4. Равносильность формул

Определение 2. Две формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ алгебры высказываний называются *равносильными*, если при любых логических значениях переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ логические значения высказываний F и A совпадают. Равносильность формул F и H записывается так: $F \cong A$.

Существует тесная связь между понятием равносильности формул и понятием тавтологии. Она заключается в следующем: формулы F и H равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \Leftrightarrow H$ является тавтологией.

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из самих определений равносильности формул и тавтологии.

Например:

1. Доказать равносильность формул $X \Leftrightarrow Y$ и $\left(\overline{X} \vee Y\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee X\right)$.

Для каждой из данных формул составим таблицу истинности:

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

X	Y	$\left(\overline{X} \vee Y\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee X\right)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Сравнивая таблицы, видим, что указанные формулы равносильны.

2. Доказать равносильность формул $X \Rightarrow Y$ и $\overline{X} \vee Y$.

Разумеется, можно сравнить таблицы истинности данных формул! Однако можно рассуждать и так: формула $X \Rightarrow Y$ ложна лишь в случае $X = 1$, $Y = 0$, а формула $\overline{X} \vee Y$ – лишь в случае $X = O$, $Y = 0$, т. е. при $X = 1$, $Y = 0$. Таким образом, обе формулы ложны или истинны одновременно.

Целый ряд равносильностей можно получить, исходя из приведенных в п. 3 тавтологий. Например, формулы $\overline{X \wedge Y}$ и $\overline{X} \vee \overline{Y}$ равносильны, поскольку формула $\left(\overline{X \wedge Y}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{X} \vee \overline{Y}\right)$ является тавтологией (см. тавтологии 4°).

Следует заметить, что выражение $F \cong H$ не является формулой. Оно представляет собой просто запись того факта, что между формулами F и H имеется определенного рода связь (а именно, что F равносильна H).

Задания для работы на занятии

5.1. Сформулируйте высказывания, которые являются отрицаниями данных высказываний. Для каждого из них определите значение истинности.

а) Я вчера решил заданную на дом задачу.
б) Все слова могут быть разделены на слоги.
в) Один в поле не воин.
г) Число 27 делится на 7.
д) Сумма 3 и 6 равна 9.
е) 253 – четное число.
ж) Число 2 рационально.
з) 3=3.
и) При всех значениях x выполняется равенство $x - 2 = 5$.
к) Для любого значения x выполняется равенство $x^2 = 4$.
л) Не существует четных простых чисел.

5.2. Установите истинность или ложность высказываний:

- Прямоугольник является трапецией.
- Квадрат является параллелограммом.
- Ромб является квадратом.
- Прямоугольник является квадратом.
- Квадрат является прямоугольником.
- Квадрат является ромбом.
- Радиус окружности является его хордой.
- Диаметр окружности является его хордой.
- Хорда является диаметром данной окружности.
- Не существует параллелограмма со взаимно перпендикулярными диагоналями.
- Все параллелограммы не имеют осей симметрии.
- Существуют параллелограммы, не имеющие осей симметрии.
- Диагонали любого ромба не равны.
- Существуют ромбы с неравными диагоналями.
- Все четные числа не делятся на 4.
- Существуют четные числа, которые не делятся на 4.
- Существуют четные числа, которые делятся на 4.

5.3. Даны высказывания:

А: «Сегодня ясно».

5.3. Даны высказывания:

А: «Сегодня ясно».

В: «Сегодня идет снег».

С: «Я буду читать».

Д: «Сегодня воскресенье».

Сформулируйте следующие высказывания:

$A\wedge D$; $A\wedge\overline{C}$; $B\vee C$; $\overline{A}\wedge B\wedge C$; $D\wedge(B\vee C)$; $\overline{A\wedge B}$; $(A\wedge\overline{B})\vee C$; $D\wedge(B\wedge\overline{C})$.

5.4. На множестве целых чисел заданы высказывания $A(x)$: «$x\geq 15$», $B(x)$: «$x<30$». Прочитайте высказывания и найдите их значения истинности.

A(12)$\wedge$ B(12); A(15) $\wedge$ B(15); A(20) $\wedge$ B(20); A(40) $\wedge$ B(40);

A(12) $\vee$ B(12); A(15) $\vee$ B(15); A(20) $\vee$ B(20); A(40) $\vee$ B(40).

5.5. На множестве $A=\{1,\ 2,\ 3,\ldots,20\}$ заданы высказывания:

$A(x)$: «число x кратно 5»,

$B(x)$: «число x четное»,

$C(x)$: «число x кратно 3»,

$D(x)$: «число x составное».

Сформулируйте следующие высказывания и найдите их множества истинности:

$A(x)\wedge B(x)$; $A(x)\vee B(x)$, $C(x)\wedge D(x)$, $C(x)\vee D(x)$, $A(x)\wedge B(x)\wedge D(x)$,

$A(x)\vee B(x)\vee D(x)$, $A(x)\wedge C(x)\wedge D(x)$, $A(x)\vee C(x)\vee D(x)$.

5.6. Определить, является ли данная последовательность формулой:

1) $(A_0\wedge A_1)A_2\overline{A_3}$

2) $(A_0\wedge A_1)\Rightarrow A_5$

3) $((A_3\Rightarrow A_0))\wedge\overline{A_0}$

4) $(((\overline{A_0})\Rightarrow A_1)\Rightarrow\overline{(A_2\vee A_3)})$

5) $(P\Rightarrow(P\vee Q))$

6) $A\Rightarrow C\wedge\overline{(D\vee C)}$

7) $((A_0\Rightarrow A_1)\vee\overline{(A_0\Rightarrow A_1)})$

8) $A_1A_2\wedge(\overline{A_3}\vee A_4)$

9) $\overline{(A\Rightarrow\overline{A})}$

10) $((P\vee R)\Rightarrow Q)$

5.7. Построить таблицы истинности для формул:

1) $((P\Rightarrow Q)\vee(P\Rightarrow(Q\wedge P)))$

2) $(\overline{(P\Rightarrow\overline{(Q\wedge P)})}\Rightarrow(P\vee R))$

3) $((P\wedge(Q\Rightarrow P))\Rightarrow\overline{P})$

4) $(((P\wedge\overline{Q})\Rightarrow Q)\Rightarrow(P\Rightarrow Q))$

5) $((C\Rightarrow A)\Rightarrow(\overline{(B\vee C)}\Rightarrow A))$

6) $\overline{((A\wedge B)\Rightarrow A)\vee(A\wedge(B\vee C))}$

7) $\big((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))\big)$

8) $\Big((Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \overline{((P \vee R) \Rightarrow Q)}\Big)$

9) $\Big(\big(\overline{A} \Rightarrow \overline{B}\big) \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge C))\Big)$

10) $\overline{(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C)}$

5.8. Доказать, что каждая из указанных формул является тавтологией:

1) $((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$

2) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))\big)$

3) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))\big)$

4) $\big((P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R))\big)$

5) $\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))\big)$

6) $\Big(\big(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\big) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\Big)$

7) $\big(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P\big)$

8) $\Big(\big(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\big) \Rightarrow \big(\big(\overline{Q} \Rightarrow P\big) \Rightarrow Q\big)\Big)$

9) $\big((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R))\big)$

10) $\Big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \Big(\big(P \Rightarrow \overline{Q}\big) \Rightarrow \overline{P}\Big)\Big)$ $\Big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \Big(\big(P \Rightarrow \overline{Q}\big) \Rightarrow \overline{P}\Big)\Big)$

5.9. Доказать эквивалентности

1) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

2) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

3) $(A \wedge (B \vee A)) \Leftrightarrow A$

4) $(A \vee (B \wedge A)) \Leftrightarrow A$

5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big(\overline{A} \vee B\big)$

6) $\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \big(\overline{A} \vee \overline{B}\big)$

7) $\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow \big(A \wedge \overline{B}\big)$

8) $\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \big(\overline{A} \wedge \overline{B}\big)$

9) $\big((A \vee B) \wedge \big(A \vee \overline{B}\big)\big) \Leftrightarrow A$

10) $\left(A \vee \left(B \wedge \overline{B}\right)\right) \Leftrightarrow A$

5.10. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение:

1) $(X > 2) \wedge \overline{(X > 3)}$

а) 1 в) 3

б) 2 г) 4

2) $(X < 2) \wedge ((X < 2) \vee (X > 2))$

а) 1 в) 3

б) 2 г) 4

3) $(X < 4) \wedge (X > 1) \wedge (X \neq 2)$

а) 1 в) 3

б) 2 г) 4

4) $(X > 4) \wedge (X < 7) \wedge (X < 6)$

а) 5 в) 3

б) 6 г) 4

5) $(X > 7) \vee \overline{(9 \leq X)}$

а) 7 в) 9

б) 8 г) 10

6) $\overline{(((X > 3) \vee (X \leq 7)) \wedge (X > 8))}$

а) 7 в) 9

б) 4 г) 2

7) $((2X - 5) > (X - 1)) \wedge \overline{((X > 7) \wedge (X < 3))}$

а) 3 в) 7

б) 4 г) 2

8) $\overline{((X > 5) \vee (X - 7 < 4) \wedge (X < 12 - 3X))}$

а) 5 в) 11

б) 9 г) 4

9) $\overline{(X \geq 7)} \wedge (X > 4)$

а) 8 в) 10

б) 6 г) 4

10) $(X \cdot 2 > 10) \wedge \overline{(X + 3 < 8)} \vee \overline{(X > 0)}$

а) 0 в) 1

б) 2 г) 4

5.11. На множестве *Z* заданы предикаты $A(x): "x \geq 15"$ и $B(x): x < 30$.

а) Сформулируйте конъюнкцию этих предикатов;

б) Прочитайте высказывания, $A(15) \wedge B(15)$, $A(40) \wedge B(40)$ и найдите их значение истинности.

5.12. На множестве треугольников плоскости заданы предикаты $A(x)$: «треугольник x прямоугольный» и $B(x)$: «треугольник x равнобедренный». Образуйте конъюнкцию и дизъюнкцию этих предикатов и начертите по 2 фигуры, принадлежащие: а) множеству истинности конъюнкции; б) множеству истинности дизъюнкции. Ответ поясните.

5.13. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$ заданы предикаты $A(x)$: «число x кратно 5», $B(x)$: «число x четное», $C(x)$: «число x кратно 3», $D(x)$: «число x составное».

Сформулируйте следующие предикаты и найдите их множества истинности

а) $A(x) \wedge B(x)$ б) $A(x) \vee B(x)$

в) $C(x) \wedge D(x)$ г) $C(x) \vee D(x)$

д) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$ е) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$

ж) $A(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$ з) $A(x) \vee C(x) \vee D(x)$

5.14. Даны высказывания: *A*: «сегодня температура воздуха ниже 0°», *B*: «сегодня солнечно», *C*: «я пойду кататься на лыжах» и *D*: «я пойду кататься на коньках». Сформулируйте высказывания, имеющие структуру: а) $A \wedge B$; б) $A \wedge D$; в) $C \vee D$; г) $A \wedge (C \vee D)$; д) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$.

5.15. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов логики высказываний:

а) в параллелограмме *ABCD* угол *A* прямой и диагонали взаимно перпендикулярны;

б) треугольник *ABC* является прямоугольным и остроугольным;

в) задуманное натуральное число больше 3, но меньше или равно 10;

г) если треугольник равнобедренный, то высота, проведенная из вершины треугольника, совпадает с биссектрисой и медианой.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки

5.16. Что изучает математическая логика?

5.17. Как определить, что предложение является высказыванием?

5.18. Каким союзам русского языка соответствуют операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции?

5.19. Какие обозначения соответствуют союзам русского языка: «…тогда и только тогда, когда…»; «и»; «или»; «если… то…»; «не»?

5.20. Какие значения истинности принимают операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции в зависимости от значений переменных?

5.21. Сформулируйте алгоритм перевода с естественного языка на формальный. Любое ли предложение можно записать на формальном языке?

5.22. Зачем необходим перевод с формального языка на естественный?

5.23. Как доказываются законы логики?

5.24. Какого типа задачи и каким методом решаются с помощью таблиц истинности?

5.25. Если высказывание A истинно, то определите, если это возможно, значение истинности следующих высказываний: $A \wedge B$, $A \vee B$, $\overline{A} \vee \mathrm{B}$, $\overline{A} \wedge \mathrm{B}$, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\overline{A} \Rightarrow \mathrm{B}$.

5.26. Если высказывание A ложно, то определите, если это возможно, значение истинности следующих высказываний: $A \wedge B$, $A \vee B$, $\overline{A} \vee \mathrm{B}$, $\overline{A} \wedge \mathrm{B}$, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\overline{A} \Rightarrow \mathrm{B}$.

Рекомендуемая литература

1. Грес П. В. Математика для гуманитариев. Общий курс. Учебное пособие. М.: Логос, 2009. 288 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

2. Лаврикова И. Н. Логика. Учимся решать: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по социально-гуманитарным специальностям / И. Н. Лаврикова. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 207 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

3. Уткин В. Б., Балдин К. В., Рокосуев А. В. Математика и информатика. Учебное пособие. Под ред. Уткина В. Б. М.: Дашков и Ко, 2011. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Р а з д е л 6.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ОБРАБОТКЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНФОРМАЦИИ

Задания и вопросы для подготовки к занятию

1. Даны буквы: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Составьте различные комбинации из них по три буквы. Сколько комбинаций получится, если: а) буквы не повторяются; б) буквы могут повторяться; в) комбинация букв обозначает название треугольника?

2. Подбросьте монетку 5 раз. Запишите результаты бросков. Сколько «орлов» и «решек» получилось в вашем опыте? Сравните с результатами других студентов. Сколько различных комбинаций «орлов» и «решек» возможно? Какова вероятность, что у кого-нибудь из группы будет ваша комбинация?

Общие теоретические сведения по комбинаторике

Решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств. Область математики, которая исследует решение комбинаторных задач, называется комбинаторикой. Все задачи, рассматриваемые комбинаторикой, требуют ответа на вопрос «сколько?» или «сколькими способами?».

Правило суммы. Если элемент a из одного множества можно выбрать m способами, а элемент b из другого множества – k способами, то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m + k$ способами, при условии, что данные множества не пересекаются.

***Задача* 1**. На столе лежат 3 яблока и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение. В данной задаче речь идет о выборе одного элемента из двух непересекающихся множеств. Можно выбрать яблоко *или* грушу, поэтому выбираем правило суммы. Яблоко можно выбрать 3 способами, грушу – 4. Таким образом, общее число способов: 3 + 4 = 7.

Ответ: 7.

Правило произведения. Если элемент a из одного множества можно выбрать m способами, а элемент b из другого множества – k способами, то вы-бор пары «a и b» можно осуществить $m \cdot k$ способами.

***Задача* 2**. В пенале лежат 5 ручек и 4 карандаша. Сколькими способами можно выбрать пару, состоящую из ручки и карандаша?

Решение. 1 способ (*метод перебора*).

Пронумеруем ручки и карандаши. Составим таблицу всех возможных вариантов пар, которые можно составить из карандаша и ручки:

	ручки				
карандаши	1	2	3	4	5
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)

Подсчитаем их количество: 4 строки умножим на 5 столбцов, получим 20 пар. То есть пару, состоящую из карандаша и ручки, можно выбрать 20 способами.

2 способ (*правило произведения*). В задаче речь идет о двух множествах, выбрать надо карандаш *и* ручку. Применим правило произведения. Карандаш можно выбрать 4 способами, а ручку – 5. Таким образом, общее число способов: $4 \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

***Задача* 3**. Сколько существует двузначных чисел?

Решение. Двузначное число состоит из двух цифр: $\overline{ab}$. Первая цифра – число десятков (множество A), вторая – число единиц (множество B):

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Задачу можно переформулировать: сколькими способами из элементов множеств A и B можно составить пару упорядоченных элементов?

Согласно правилу произведения: $9 \cdot 10 = 90$.

Ответ: 90.

Перестановка без повторений из *n* элементов

Дано множество, состоящее из n различных элементов.

Перестановкой называется упорядоченное множество, составленное из данных элементов.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты перестановок, которые можно найти с помощью *метода перебора*:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначается P_n и находится по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (1)$$

Число $n!$ читается как «n факториал». Считается, что $1! = 1$, $0! = 1$.

Например, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Перестановка с повторениями из *n* элементов

Дано множество, состоящее из n элементов, из которых k и m элементов повторяются. При этом от перестановки одинаковых элементов вид упорядоченного множества не меняется.

Например, для множества $\{a, a, c\}$ существуют следующие варианты перестановок, которые можно найти с помощью *метода перебора*:

$$\{a, a, c\}, \{a, c, a\}, \{c, a, a\}.$$

Число всевозможных перестановок из n элементов с k и m повторениями обозначается $P_{n;\,k,\,m}$ и находится по формуле

$$P_{n;k,m} = \frac{P_n}{P_k \cdot P_m} = \frac{n!}{k! \cdot m!} \qquad (2)$$

Например, $P_{3;2} = \dfrac{3!}{2!} = 3$; $P_{7;3,2} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 420$.

Размещение без повторений из *n* элементов по *k* элементам

Дано множество, состоящее из *n* элементов.

Размещением без повторений из *n* элементов по *k* называется перестановка из *k* элементов, выбранных из *n*-элементного множества один раз.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты размещений без повторений по 2 элементам, которые можно найти с помощью *метода перебора*: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$.

Число всевозможных размещений без повторений *k* из *n* элементов обозначается A_n^k и находится по формуле

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-(k-1))}_{k \text{ множителей}} \tag{3}$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{4}$$

Например, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ или $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ или $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Размещение с повторениями из *n* элементов по *k* элементам

Дано множество, состоящее из *n* элементов.

Размещением с повторениями из *n* элементов по *k* называется перестановка из *k* элементов, выбранных из *n*-элементного множества, причем каждый элемент может быть выбран несколько раз.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты размещений с повторениями по 2 элементам, которые можно найти с помощью *метода перебора*: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$.

Число всевозможных размещений с повторениями *k* из *n* элементов обозначается $\overline{A}_n^k$ и находится по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{5}$$

Например, $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Сочетание без повторений из *n* элементов по *k* элементам

Дано множество, состоящее из *n* элементов.

Сочетанием без повторений из *n* элементов по *k* элементам называется неупорядоченное подмножество данного множества, состоящее из *k* элементов.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты сочетаний без повторений по 2 элементам, которые можно найти с помощью *метода перебора*: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, b\}$.

Число всевозможных сочетаний без повторения k из n элементов обозначается C_n^k и находится по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \tag{6}$$

Например, $C_3^2 = \frac{A_3^2}{P_2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ или $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2} = 3$;

$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$ или $C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$.

Сочетание с повторениями из *n* элементов по *k* элементам

Дано множество, состоящее из n элементов.

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченное подмножество данного множества, состоящее из k элементов, причем элементы могут повторяться.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты сочетаний с повторениями по 2 элементам, которые можно найти с помощью *метода перебора*: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, b\}$, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$.

Число всевозможных сочетаний с повторениями k из n элементов обозначается $\overline{C}_n^k$ и находится по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{7}$$

Например, $\overline{C}_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$.

При решении задач в первую очередь необходимо определить, является ли эта задача комбинаторной, т. е. можно ли сформулировать задачу в форме вопроса «сколькими способами?». Затем необходимо определить, какое правило надо применить для решения задачи.

Важно определить, о скольких множествах идет речь:

а) если два и более непересекающихся множества, то возможны два варианта:

− если элементы множеств связаны с помощью союза «или» (выбирается один элемент), тогда применяется правило суммы;

− если элементы множеств связаны с помощью союза «и» (выбирается группа), тогда применяется правило произведения;

б) если одно множество, то для определения формулы можно обратиться к таблице 1. Для этого важно определить: сколько элементов множества участвуют, важен ли порядок и разрешены ли повторы.

Таблица 1

Количество элементов множества	Порядок	Повторы	Название	Формула
Все элементы	Порядок существенен	Повторы отсутствуют	Перестановка без повторений из n элементов	$P_n = n!$
Все элементы	Порядок существенен	Повторы разрешены	Перестановка с k и m повторяющимися элементами из n элементов	$P_{n;k,m} = \dfrac{n!}{k!\cdot m!}$
Не все элементы множества	Порядок существенен	Повторы отсутствуют	Размещение без повторений из n элементов по k элементам	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Не все элементы множества	Порядок существенен	Повторы разрешены	Размещение с повторениями из n элементов по k элементам	$\overline{A}_n^k = n^k$
Не все элементы множества	Порядок не существенен	Повторы отсутствуют	Сочетание без повторений из n элементов по k элементам	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$
Не все элементы множества	Порядок не существенен	Повторы разрешены	Сочетание с повторениями из n элементов по k элементам	$\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Общие теоретические сведения по теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Случайное событие – исход наблюдения, эксперимента или опыта, который при реализации некоторого комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Элементарный исход – один из возможных вариантов результата опыта.

Равновозможные исходы – элементарные исходы, которые имеют одинаковый шанс произойти или не произойти.

Несовместные исходы – исходы, которые одновременно произойти не могут.

Событие называют *достоверным*, если оно непременно должно произойти. Событие называют *невозможным*, если оно заведомо не наступит.

Событием, *противоположным* некоторому событию A, называют событие $\overline{A}$, состоящее в том, что A не наступило.

События A и B называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого.

Говорят, что событие B следует из события A, если событие B происходит всегда, когда произошло событие A. Два события A и B называются *равными*, если из A следует B и из B следует A.

События называются *независимыми*, если появление одного события не влечет появление другого.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что произошло событие A **или** событие B.

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие AB, заключающееся в совместном наступлении событий A **и** B.

Классическое определение вероятности. Пусть некоторый опыт имеет n равновозможных и несовместных исходов. Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятных исходов $m(A)$ к общему числу n несовместных равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}. \qquad (8)$$

Свойства вероятности

1. Для любого случайного события $0 \le P(A) \le 1$.

2. Пусть A_1, A_2, …, A_k – все события, которые могут произойти в результате опыта. Тогда $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) = 1$. (9)

3. Пусть A – некоторое событие, $\overline{A}$ – противоположное событие, тогда верно равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. (10)

Правило суммы вероятностей. Вероятность суммы несовместных событий есть сумма вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad (11)$$

Правило произведения вероятностей независимых событий. Вероятность произведения событий есть произведение вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (12)$$

События A и B называются *зависимыми*, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

Правило произведения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло, т. е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) \qquad (13)$$

Вероятность суммы совместных событий. Вероятность суммы совместных событий есть сумма вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (14)$$

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти определенное событие A. Если событие произошло, испытание называется *успешным*, а событие – *успехом*; противоположное событие – *неудача*. Испытание повторяется n раз. При этом соблюдаются следующие условия: вероятность успеха $P(A) = p$ в каждом испытании одна и та же; вероятность противоположного события $P(\overline{A}) = q$ (причем $q = 1 - p$); результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Такая последовательность испытаний с двумя исходами (успех/неудача) называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*.

Вероятность того, что в схеме Бернулли из n независимых испытаний произошло ровно k успехов, находится по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (15)$$

Следствия из формулы Бернулли:

1. $P_n(n) = p^n$, $P_n(0) = q^n$.
2. $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(n) = 1$.

Рассмотрим задачи на нахождение вероятности события.

***Задача* 4**. Вася, Петя, Коля и Саша бросили жребий – кому начать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен Коля.

Решение. Случайный эксперимент – бросание жребия. Элементарное событие – участник, который выиграл жребий. Общее число независимых равновозможных элементарных событий n=4. Событию A={жребий выиграл Коля} благоприятен только один исход, поэтому m=1. Тогда $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

***Задача* 5.** В случайном эксперименте симметричную монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпадет ровно два раза?

Решение. В описанном эксперименте элементарные исходы – тройки «орлов» (О) и «решек» (Р). Выпишем их все в таблицу:

Элементарный исход	ООО	ООР	ОРО	ОРР	РОО	РОР	РРО	РРР
Число орлов	3	2	2	1	2	1	1	0

Всего исходов 8, из них благоприятных 3, тогда $P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Задачу можно решить по формуле вероятности двух успехов в серии из трех испытаний по формуле Бернулли (15): $P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}375$, где p=0,5 – вероятность «орла» (успеха) при одном броске, q= 0,5 – вероятность «решки» (неудачи).

Ответ: 0,375.

***Задача* 6.** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в одном автомате закончится кофе, равна 0,3; а в обоих автоматах – 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Определим события и их вероятность: A = {кофе закончится в первом автомате}, B = {кофе закончится во втором автомате}; $P(A) = P(B) = 0{,}3$ и $P(AB) = 0{,}12$.

Событие C = {кофе останется в обоих автоматах} противоположно событию «кофе закончится хотя бы в одном автомате», т. е. $P(C) = 1 - P(A + B)$.

По формуле (14) сложения вероятностей найдем вероятность события $P(A+B)=0{,}3+0{,}3-0{,}12=0{,}48$; следовательно, $P(C)=1-0{,}48=0{,}52$.

Ответ: 0,52.

***Задача* 7.** Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал, а последние два раза промахнулся.

Решение. Результат каждого следующего выстрела не зависит от предыдущих, поэтому рассматриваются независимые события. Вероятность каждого попадания равна 0,8. Значит, вероятность каждого промаха 1 – 0,8=0,2.

По формуле (12) умножения вероятностей независимых событий находим: $P(A)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}02048$.

Ответ: 0,02048.

Задания для работы на занятиях

6.1. Студент до университета может поехать на одном из трех различных автобусов или одним из двух троллейбусов, а также он может дойти пешком. Сколькими способами студент может добраться до университета?

6.2. Сколько существует четырехзначных чисел, в которых цифры: а) не повторяются; б) могут повторяться?

6.3. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв: А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке этого племени?

6.4. В распоряжении сигнальщика имеется 5 флажков: синий, белый, красный, оранжевый и зеленый. Для передачи сообщения на мачте вывешиваются три флажка, имеют значение цвет флажков и порядок, в котором они вывешиваются. Сколько различных сообщений можно закодировать таким образом? Сколько раз в этих сообщениях используется синий флажок?

6.5. Автомобильные номера содержат 3 цифры и три буквы. Сколько номеров можно составить из 10 цифр и букв русского алфавита, по записи совпадающих с буквами латинского алфавита?

6.6. У продавца имеется 4 букета и оберточная бумага четырех цветов. Сколькими способами можно упаковать букеты так, чтобы все были обернуты в бумагу разных цветов?

6.7. Сколько могло бы быть расположений цветов радуги?

6.8. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове: «куб», «ромб», «линия».

6.9. Сколько нечетных трехзначных чисел можно составить из цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5}, в которых цифры: а) не повторяются; б) могут повторяться?

6.10. От пяти платформ необходимо отправить 3 поезда. Сколько существует вариантов отправки составов?

6.11. Расписание одного дня учебы состоит из пяти уроков. Определить количество возможных вариантов расписания, если изучается 11 различных предметов и по каждому предмету может быть только один урок в день.

6.12. На конкурсе парикмахеров 3 номинации. Один мастер может участвовать во всех трех номинациях. Всего 10 кандидатов на участие в конкурсе. Сколькими способами можно выбрать конкурсантов?

6.13. Из 7 ингредиентов для приготовления супа нужно использовать пять. Сколько существует способов сварить суп, если вне зависимости от порядка добавления продуктов вкус блюда неизменен?

6.14. На участие в конференции прислали заявки 20 человек. На пленарном заседании могут выступить 5 человек. Сколькими способами можно составить список выступающих?

6.15. Сколько способов выбрать 3 дежурных из класса, в котором 20 учеников?

6.16. Имеется собрание сочинений из 4 книг одного автора и из 6 книг другого автора. Сколько наборов из 5 книг можно составить, чтобы в наборе было 2 книги первого автора и 3 книги второго?

6.17. В магазине продаются пирожные четырех видов: «Заварное», «Буше», «Картошка» и «Глазированное». В гости придут 10 человек. Сколькими способами можно купить пирожное для чаепития?

6.18. *Замок открывается, если правильно набран определенный трехзначный номер, который может состоять из пяти различных цифр. Попытка состоит в наборе трех цифр наугад, без повторения набранных ранее комбинаций. Открыть замок удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько неудачных попыток было до этого?

6.19. Игральную кость бросают один раз. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

6.20. В стандартной колоде 36 карт. Из колоды извлекается одна карта. Какова вероятность вытянуть: туз, карту красного цвета, карту масти «крести»?

6.21. В коробке находится 10 белых шаров и 3 красных. Какова вероятность наугад вытянуть из коробки красный шар? Белый шар? Черный шар?

6.22. Пять раз бросают монету. Какова вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза? Хотя бы 2 раза?

6.23. Бросили две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равна 7, меньше 5, не меньше 12?

6.24. На семи карточках написаны буквы: а, а, о, с, т, т, ч. Какова вероятность того, что при произвольном расположении карточек в ряд составится слово «частота»?

6.25. Какова вероятность того, что выбранное наугад число от 1 до 12 будет делителем числа 12?

6.26. *В коробке лежат 8 белых и 6 черных шариков. Найти вероятность того, что среди 4 выбранных наугад шариков будет ровно 2 белых.

6.27. *Студент знает ответы на 40 вопросов из 50 вынесенных на экзамен. Чтобы сдать экзамен, ему нужно ответить хотя бы на два вопроса из трех, которые включены в билет. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

6.28. В стандартной колоде 36 карт. Из колоды извлекается одна карта, запоминается, затем возвращается обратно, колода перемешивается. Затем извлекается вторая карта. Какова вероятность того, что из колоды будут вытянуты два туза, если их последовательность не имеет значения?

6.29. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Из них случайно вытягивают одну, а затем другую. Какова вероятность, что число на второй карточке будет больше, чем на первой?

6.30. *На предприятии установлены две независимые пожарные сигнализации. Вероятность срабатывания первой равна 0,9, а второй – 0,8. Остается ли вероятность того, что при пожаре сигнализация не сработает?

Задания для самостоятельной работы

6.31. В коробке m конфет с вишневой начинкой, n – с абрикосовой и k – с клубничной. Сколькими способами можно взять одну конфету?

6.32. Билет на экзамене состоит из двух вопросов. Сколькими способами можно скомпоновать билет, если m вопросов из одной темы составят первую половину билета, n вопросов из другой темы – вторую?

6.33. На магнитной доске было составлено слово из k различных букв. Сколько новых слов можно составить из этого набора букв?

6.34. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из набора цифр $\{a, b, c, d, e\}$?

6.35. В соревнованиях по плаванию участвуют n спортсменов. Сколькими способами могут быть распределены 1, 2 и 3-е места?

6.36. Сколькими способами из n различных букв можно записать k-буквенное слово, при условии, что буквы в нем могут повторяться?

6.37. В кафе работают n сотрудников. Каждый день на работу должны выходить k сотрудников. Сколькими способами можно составить график работы персонала кафе?

6.38. Для поздравления с праздником необходимо купить n открыток. В магазине продаются открытки k видов. Сколькими способами можно купить открытки?

6.39. В чемпионате по гимнастике участвуют n спортсменок: k из России, m из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

6.40. В случайном эксперименте при бросании двух игральных костей в сумме выпало n очков. Какова вероятность того, что на одной из костей было число k?

6.41.* Два спортсмена стреляют по одной мишени. Известно, что результаты одного спортсмена не зависят от результатов другого. Первый спортсмен попадает в мишень n%, а второй – k%. Какова вероятность того, что мишень останется не пораженной?

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте общие правила комбинаторики.
2. Представьте схемы выбора, приводящие к сочетаниям, размещениям, перестановкам.
3. Как найти вероятность события? Сформулируйте свойства и правила нахождения вероятности.

Рекомендуемая литература

1. Афанасьев В. В. Теория вероятностей: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В. В. Афанасьев. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. 350 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

2. Грес П. В. Математика для гуманитариев. Общий курс: учебное пособие. / П. В. Грес. – М.: Университетская книга; Логос, 2009. 288 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

1. Гусева Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: [электронный ресурс] учеб. пособие / Е. Н. Гусева. – М.: ФЛИНТА, 2011. 220 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

2. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А., Симонова Г. И.Теория вероятностей: учебник для экономических и гуманитарных специальностей. – М.: МЦНМО, 2009. 256 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

3. Математика и информатика: учеб. пособие для студентов педагогических вузов / Н. Л. Стефанова, В. Д. Будаев, Е. Ю. Яшина и др.; под ред. В. Д. Будаева, Н. Д. Стефановой. – М.: Высш. шк., 2004.

4. Стойлова Л. П. Математика: учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений / Л. П. Стойлова. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. 432 с.

Индивидуальные задания к разделу 6
«Методы решения комбинаторных задач как средство обработки и интерпретации информации»

Задача / Вариант	1			2		3	4	5	6		7		8		9			10		11	
	m	***n***	***k***	***m***	***n***	***K***	**цифры**	***n***	***n***	***k***	***n***	***k***	***n***	***k***	***n***	***k***	***m***	***n***	***k***	***n***	***k***
Вариант 1	8	7	5	12	16	7	1,2,3,3,4	15	8	2	20	4	5	15	25	10	8	10	4	80	70
Вариант 2	5	9	6	17	14	5	3,5,5,6,8	13	6	3	15	3	3	10	30	15	7	8	3	60	80
Вариант 3	6	4	9	21	16	8	2,3,4,7,7	20	9	2	18	5	5	20	20	7	9	9	5	70	90
Вариант 4	4	8	3	13	15	4	5,6,6,7,7	12	7	3	14	3	4	12	15	6	3	7	2	90	60
Вариант 5	9	5	7	25	17	6	1,1,2,3,3	10	5	2	12	5	3	10	20	13	2	6	4	40	50
Вариант 6	5	7	8	15	20	7	5,6,6,8,9	11	7	2	13	5	4	15	18	7	6	4	1	70	40
Вариант 7	3	8	9	18	21	3	2,3,4,5,5	14	9	3	16	4	5	20	32	15	9	5	2	90	50
Вариант 8	7	3	5	24	19	6	6,6,7,8,9	16	8	3	17	4	3	15	26	11	7	8	2	80	30
Вариант 9	8	9	3	14	12	5	1,2,7,7,8	17	6	2	19	3	4	20	24	9	8	7	4	70	60
Вариант 10	6	8	4	16	18	4	3,3,4,7,8	18	5	3	11	4	5	15	12	3	5	9	3	50	80
	конфеты			вопросы		буквы	цифры	спорт	буквы		сотруд-ники		открытки		спорт			2 кубика		мишень	
											б		б		Б+			б			

Раздел 7.
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ

Задания и вопросы для подготовки к занятию

1. Пусть M – число выпадений «орла» при десяти подбрасываниях монеты. Подбросьте монету 10 раз и запишите результат. Сравните с резуль-татами ваших однокурсников. Какие значения может принимать величина M? Какие значения получались чаще?

2. Запишите числа дней рождения студентов вашей группы. В какой половине месяца в вашей группе больше именинников? Есть ли такое число месяца, в которое в вашей группе нет ни одного именинника? Можно ли сделать вывод, что в день с таким числом не рождаются люди?

Общие теоретические сведения

Случайные величины

Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает то или иное заранее неизвестное числовое значение. Каждой случайной величине X соответствует некоторое множество чисел. Это множество значений, которые может принимать величина X.

Дискретная случайная величина – случайная величина X, принимающая отдельные значения x_i с вероятностями p_i. Причем, если x_1, x_2, … – возможные значения величины X, а p_1, p_2, … – их вероятности, то $p_1 + p_2 + \ldots = 1$. Примером случайной величины может служить количество выпавших очков при подбрасывании игрального кубика:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_6 = 6, p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая принимает любые значения из некоторого интервала на множестве действительных чисел. Например, температура воздуха в определенный день, вес ребенка в каком-либо возрасте и т. д.

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ – наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его положение и степень разбросанности.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X – сумма всех произведений ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (7.1)$$

Если все значения случайной величины равновероятны, то математическое ожидание – среднее арифметическое значений.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i\,. \qquad (7.2)$$

Дисперсию можно вычислять по формуле: разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$. (7.3)

Пример 1. В качестве случайной величины X возьмем число очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятность выпадения каждой грани одинакова и равна $\frac{1}{6}$. Поэтому

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3{,}5\,.$$

x_i	1	2	3	4	5	6
$x_i - M(X)$	– 2,5	– 1,5	– 0,5	0,5	1,5	3,5
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$D(X)=(-2{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(-0{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+0{,}5^2\cdot\frac{1}{6}+1{,}5^2\cdot\frac{1}{6}+3{,}5^2\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot(6{,}25+2{,}25+0{,}25+0{,}25+2{,}25+6{,}25)\approx 2{,}917.$$

У дисперсии есть недостаток: дисперсия измеряется не в тех единицах, что сама случайная величина, а в квадратных. Но не для всех единиц измерения существуют квадратные (сантиметр – квадратный сантиметр, метр – квадратный метр; килограмм – ?, минута – ?). По этой причине вместо дисперсии часто используется мера рассеивания, которая называется *средним квадратичным* или *стандартным отклонением** (и равна арифметическому квадратному корню из дисперсии).

$$\sigma=\sqrt{D(X)} \qquad (7.4)$$

В рассмотренном примере с бросанием кости $\sigma\approx\sqrt{2{,}917}\approx 1{,}71$.

Начала математической статистики

Математическая статистика – наука, изучающая массовые явления для выявления закономерностей и получения некоторых обобщенных показателей, кратко характеризующих полученные данные. Основой математической статистики является теория вероятностей.

* Обозначается греческой буквой σ (сигма).

Под статистическими данными понимается любая числовая информация, характеризующая некоторую совокупность объектов, обладающих теми или иными общими признаками. Статистические данные могут быть представлены в различных формах. Набор данных может содержать одно или несколько значений для каждого из отдельных объектов. Эти объекты называют элементарными единицами. Для каждого объекта регистрируют один и тот же признак или одни и те же признаки. Например, регистрируется возраст, рост и масса школьников; год издания, количество страниц для книг и т. д.

Все множество исследуемых объектов называется ***генеральной совокупностью*** (***ГС***). Общее свойство объектов генеральной совокупности называется признаком генеральной совокупности. Значения признака, который регистрируется для каждого из объектов, называют ***вариантами***.

Выборка (***В***), или *выборочная совокупность* – подмножество генеральной совокупности, где каждый ее элемент выбирается случайным образом.

Объем совокупности (генеральной или выборочной) – количество элементов в ней; обозначения: N – объем генеральной совокупности, n – объем выборки. Из определений *ГС* и *В* следует, что $N > n$ (как правило, $N > 1000$, $10 \le n \le 100$).

По аналогии со случайными величинами эмпирические варианты могут быть дискретными и непрерывными. Примерами дискретной варианты является число детей в семье; число клиентов, обратившихся в фирму за определенный промежуток времени, и т. д.; непрерывной – результат измерения роста человека (например, от 160 до 180); урожайность культуры, выращенной в хозяйстве, и т. п.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – совокупность случайных значений случайной величины X, т. е. выборка, тогда данную совокупность x_i называют ***эмпирическим рядом***.

Эмпирический ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представленный в порядке возрастания с перечислением повторяющихся значений (упорядоченная выборка), называется ***ранжированным вариационным рядом***: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (где $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$).

Эмпирический ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представленный в порядке возрастания без повторяющихся значений (ранжированный ряд без повторов), называется ***дискретным вариационным рядом***: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$). Каждое значение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ называется *вариантой* выборки.

Если в вариационном ряде значения признака заданы в виде интервалов, то такой ряд называют ***интервальным*** (например, таблица 7.1).

Значения эмпирического ряда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ располагаются в пределах отрезка $[x_{min}; x_{max}]$, где x_{min} – минимальное значение из эмпирического ряда, x_{max} – максимальное значение из эмпирического ряда.

Табличное представление первичной обработки статистических данных

Результаты измерения, как правило, фиксируют сначала в произвольном или в алфавитном порядке (например, при проверке скорости чтения учащихся вызывают в том порядке, в каком они записаны в классном журнале), или в том порядке, в каком поступают результаты измерения (например, результаты проверки тестирования поступают в том порядке, в каком лежат бланки ответов). В такой форме полученные данные неудобны для анализа и выявления закономерностей.

Первичная обработка статистических данных состоит в упорядочении данных (по возрастанию или убыванию), подсчете некоторых показателей, характеризующих эти значения, в группировании данных.

Проиллюстрируем все сказанное на конкретном примере.

Пример 2. В таблице 7.1 представлены данные о скорости чтения учащихся 2-го класса, т. е. количество слов, которые ученик прочитывает за минуту.

Таблица 7.1

№ ученика[1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Скорость чтения	53	49	90	85	53	72	85	45	64	70	58	53	81
№ ученика	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Скорость чтения	34	40	53	72	45	72	64	72	64	51	45	40	

1 – номер ученика используется вместо его фамилии.

Первый шаг обработки этих данных – составить ранжированный вариационный ряд. Для рассматриваемого примера в таблице 7.2 представлены те же 25 данных, но упорядоченные по убыванию от 90 до 34.

Эта таблица позволяет установить ***ранг*** ученика, т. е. место, которое он занимает среди проверявшихся учеников, по скорости чтения. Чем меньше ранг, тем больше скорость чтения ученика. Ученик с рангом 1 имеет наибольшую скорость чтения. Поскольку имеются ученики с одинаковой скоростью чтения, то их ранги целесообразно считать одинаковыми, а именно – равными средним арифметическим соответствующих значений.

Например, ученики со скоростью чтения 85 слов/мин занимают 2-е и 3-е места, ранг каждого из них равен $(2+3):2=2{,}5$. Ученики со скоростью чтения 53 слова/мин занимают 14, 15, 16 и 17-е, поэтому ранг каждого из них равен $(14+15+16+17):4=15{,}5$.

Таблица 7.2

№ ученика[1]	3	4	7	13	6	17	19	21	10	9	20	22	11
Скорость чтения	90	85	85	81	72	72	72	72	70	64	64	64	58
Ранг ученика	1	2,5	2,5	4	6,5	6,5	6,5	6,5	9	11	11	11	13
№ ученика	1	5	12	16	23	2	8	18	24	15	25	14	
Скорость чтения	53	53	53	53	51	49	45	45	45	40	40	34	
Ранг ученика	15,5	15,5	15,5	15,5	18	19	21	21	21	23,5	23,5	25	

Почему ранг учащихся со скоростью чтения 64 слова/мин равен 11?

В случае если некоторые значения встречаются неоднократно, составляют дискретный вариационный ряд. Число случаев, в которых встречается значение x_i, называют ***частотой*** значения x_i и обозначают p_i[1]. Составляют таблицу абсолютных частот:

$\boldsymbol{a_i}$	a_1	a_2	a_3	…	a_m
$\boldsymbol{p_i}$	p_1	p_2	p_3	…	p_m

Упорядочение данных и подсчет их частот можно выполнять с помощью редактора электронных таблиц Microsoft Excel. Для этого используются команды  или  и статистическая функция (ЧАСТОТА).

Сумму $p_1 + p_2 + ... + p_m$ называют *объемом совокупности данных* и обозначают n; число различных значений, которые принимает исследуемая величина – m.

В рассматриваемом примере $m = 13$, $n = 25$.

Частота значения величины является ее определенной характеристикой, но недостаточной: в ней не учтен объем совокупности данных. Поэтому рассматривают такой показатель, как относительная частота значения.

Относительной частотой[1] p_i^* значения x_i называют отношение частоты p_i этого значения к объему n совокупности данных:

$$p_i^* = \frac{p_i}{n} \tag{7.5}$$

В *таблице относительных частот* сопоставляются событие a_i с его относительной частотой:

$\boldsymbol{a_i}$	a_1	a_2	a_3	…	a_m
$\boldsymbol{p_i^*}$	p_1^*	p_2^*	p_3^*	…	p_m^*

Для рассматриваемого примера абсолютные и относительные частоты скоростей чтения приведены в таблице 7.3.

Таблица 7.3

x_i	90	85	81	72	70	64	58	53	51	49	45	40	34
p_i	1	2	1	4	1	3	1	4	1	1	3	2	1
p_i^*	0,04	0,08	0,04	0,16	0,04	0,12	0,04	0,16	0,04	0,04	0,12	0,08	0,04

Относительная частота значения является краткой и содержательной характеристикой рассматриваемой информации. Например, если считать, что для ученика 2-го класса нормой скорости чтения является 60 слов/мин, то относительная частота значений, не меньших нормы (т. е. от 90 до 64), в рассматриваемом случае равна $\frac{12}{25} = 0{,}48$, то есть меньше половины второклассников достигли нормы.

---

[1] В литературе встречается разное буквенное обозначение.

[1] Относительная частота – статистическая характеристика, вероятность – математическая характеристика.

Графическое изображение вариационных рядов

Графическое изображение зависимости между величинами дает возможность представить ее наглядно. Для изображения вариационных рядов, т. е. соотношений между значениями признака и соответствующими частотами или относительными частотами, используются *полигон*, *гистограмма* и *кумулята*. Их построения выполняют в программе Microsoft Excel.

Полигон чаще всего используют для изображения дискретных рядов. Для построения полигона в прямоугольной системе координат в произвольно выбранном масштабе на оси абсцисс откладывают значения аргумента, т. е. ва-рианты, а на оси ординат – значения частот или относительных частот. Масштаб выбирают такой, чтобы была обеспечена необходимая наглядность.

Полигоном абсолютных частот называют кривую, отрезки которой соединяют точки (a_1; p_1), (a_2; p_2), …, (a_m; p_m). Таблица и полигон абсолютных частот задают эмпирический закон распределения.

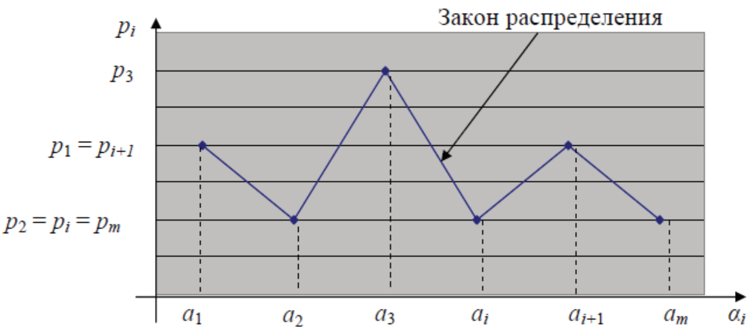


Рис. 7.1. Полигон абсолютных частот

Полигоном относительных частот называют кривую, отрезки которой соединяют точки (a_1; p_1^*), (a_2; p_2^*), …, (a_m; p_m^*). Таблица и полигон относительных частот задают эмпирический закон распределения.

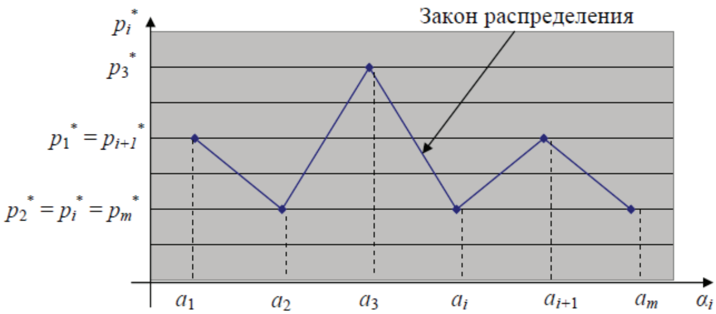


Рис. 7.2. Полигон относительных частот

Графики абсолютных и относительных частот не отличаются, разница лишь в том, что полигон абсолютных частот в *n* раз выше полигона относительных. Поэтому при графическом или табличном представлении первичной обработки выборки можно использовать один из эмпирических законов (либо относительных, либо абсолютных частот).

Эмпирический закон распределения в примере 2 наглядно представлен в виде полигонов для абсолютных (рис. 7.3) и относительных (рис. 7.4) частот скорости чтения.

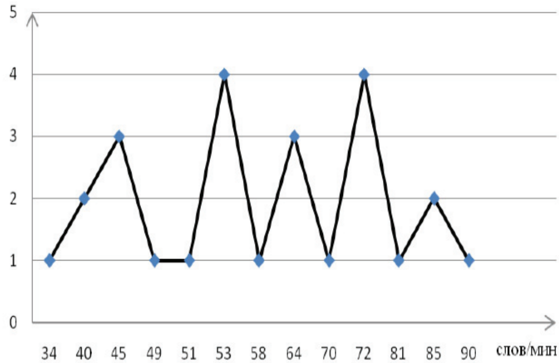


Рис. 7.3

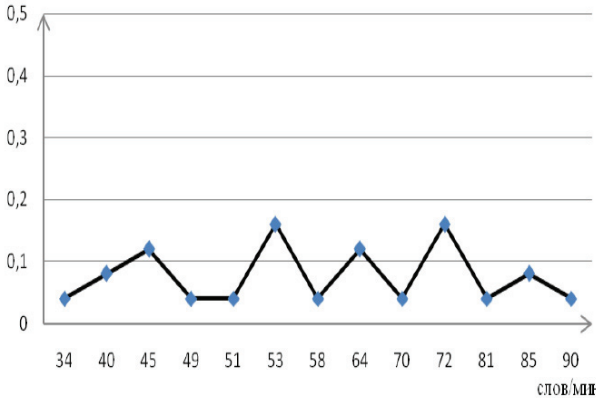


Рис. 7.4

Для непрерывных эмпирических переменных, а также для дискретных выборок большого объема используется ***интервальный закон распределения***. При анализе результатов скорости чтения можно не рассматривать в отдельности каждое значение, а разбить их на группы. Ведь сложно отличить скорость 51 от 53 слов/мин, но можно различить учащихся, скорость чтения которых находится в диапазоне от 30 до 50 и от 70 до 90 слов/мин.

В литературе описываются различные способы группирования значений и разбиения на интервалы. В школьной практике границы группы часто определяются критериями отметки.

Если в интервальном вариационном ряде в двух последовательных интервалах верхнее предельное значение признака одного интервала равно нижнему предельному значению второго, условно считают, что это число принадлежит второму интервалу.

Разность между верхней и нижней границами интервала называется *шириной* этого *интервала*.

Для изображения интервального закона распределения используют ***гистограмму.*** Для построения гистограммы по данным вариационного ряда с равными интервалами, как и для полигона, на оси абсцисс откладывают значения аргумента, а на оси ординат – значения частот или относительных частот. Далее строят прямоугольники, основаниями которых служат отрезки оси абсцисс, длины которых равны длинам интервалов – h, а высотами – отрезки, пропорциональные частотам или относительным частотам соответствующих интервалов.

В результате получают ступенчатую фигуру в виде сдвинутых друг к другу прямоугольников, площади которых пропорциональны частотам (или относительным частотам).

Если интервалы неравные, то на оси ординат следует откладывать в произвольно выбранном масштабе значения плотности распределения (абсолютной или относительной), т. е. высоты прямоугольников должны равняться плотностям соответствующих интервалов. ***Плотность распределения*** – это частота, рассчитанная на единицу ширины интервала, т. е. сколько единиц в каждой группе приходится на единицу величины интервала.

Представим вариационный ряд (таблица 7.1) в виде интервального ряда с равными интервалами, длины которых равны 15, в таблице 7.4.

Таблица 7.4

Количество слов/мин	30–45	45–60	60–75	75–100
Частота интервала (p_i)	3	10	8	4
Относительная частота интервала (p_i^*)	0,12	0,4	0,32	0,16

Построим гистограммы частот (рис. 7.5) и относительных частот (рис. 7.6) для рассматриваемой характеристики – скорости чтения.

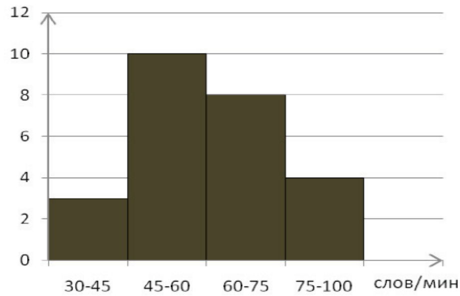


Рис. 7.5

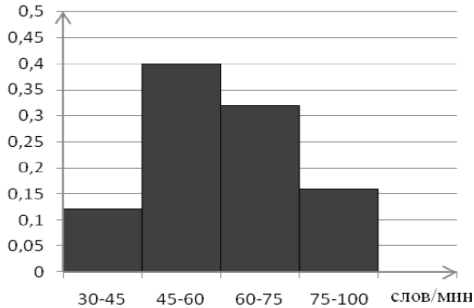


Рис. 7.6

Накопленные частоты определяются путем последовательного суммирования частот по группам и показывают, сколько единиц совокупности имеют значения признака не больше, чем рассматриваемое значение.

Для графического изображения вариационных рядов может также использоваться ***кумулятивная кривая*** – полигон накопленных частот, при помощи которой изображается ряд накопленных частот (*кумулятивный вариационный ряд*). Для построения кумуляты на оси абсцисс откладывают значения аргумента, а на оси ординат – накопленные частоты или накопленные относительные частоты. Масштаб для каждой оси выбирают произвольно. Далее строят точки, абсциссы которых равны вариантам (в случае дискретных рядов) или верхним границам интервалов (в случае интервальных рядов), а ординаты – соответствующим частотам (накопленным частотам). Эти точки соединяют отрезками прямой. Полученная ломаная называется кумулятой.

По данным таблицы 7.3 составим кумулятивный вариационный ряд для частот (таблица 7.5) и относительных частот (таблица 7.6).

Таблица 7.5

Кол-во слов/мин	34	40	45	49	51	53	58	64	70	72	81	85	90
Частота	1	2	3	1	1	4	1	3	1	4	1	2	1
Накопленная частота	1	3	6	7	8	12	13	16	17	21	22	24	25

Таблица 7.6

Кол-во слов/мин	34	40	45	49	51	53	58
Относительная частота	0,04	0,08	0,12	0,04	0,04	0,16	0,04
Накопленная отн. частота	0,04	0,12	0,24	0,28	0,32	0,48	0,52
Кол-во слов/мин	64	70	72	81	85	90	
Относительная частота	0,12	0,04	0,16	0,04	0,08	0,04	
Накопленная отн. частота	0,64	0,68	0,84	0,88	0,96	1	

По этим данным построим кумуляты для частот (рис. 7.7) и относительных частот (рис. 7.8) скорости чтения учащихся рассматриваемого примера.

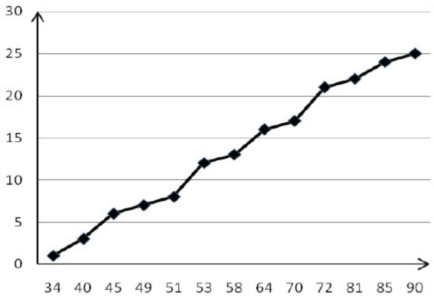


Рис. 7.7

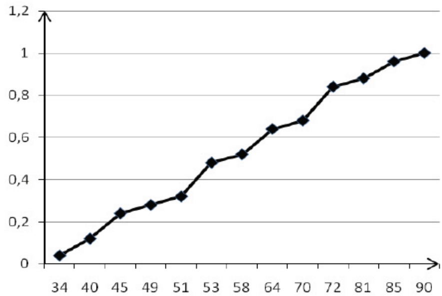


Рис. 7.8

Средние величины

В результате исследований, связанных с массовыми явлениями, получают много числовых данных. Возникает проблема – найти такие характеристики, которые довольно полно характеризовали бы полученный числовой материал. Характеристики, которые базируются на данных массовых наблюдений, называют обобщающими показателями. Эти показатели характеризуют значения признака, его вариацию. Их вычисляют с помощью вариант и соответствующих частот (относительных частот). Важнейшие среди обобщающих показателей – средние величины, т. е. такие значения признака, вокруг которых группируются отдельные наблюдаемые значения элементов. Отсюда и название – меры центральной тенденции.

Средние величины используются для характеристики эмпирического ряда. Они подразделяют на степенные и структурные. К степенным средним величинам относят: арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратичную средние величины. К структурным – моду и медиану.

Пусть имеется n объектов, для которых измерена некоторая характеристика и получены значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Средняя степенная отражает величину, варьирующуюся (изменяющуюся) в расчете на единицу всей выборки. Принято различать простые и взвешенные средние величины.

Простая средняя величина применяется в тех случаях, когда каждое значение случайной величины встречается один или одинаковое число раз. Если отдельные значения исследуемой выборки встречаются не один, а много, причем неодинаковое число раз, то рассчитывают среднюю *взвешенную величину*.

Простая средняя арифметическая $\left(\overline{x_a}\right)$ – сумма всех значений выборки, деленная на общее количество этих значений:

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (7.6)$$

Взвешенная средняя арифметическая $\left(\bar{x}_{ap}\right)$ – средняя из вариант (a_i) дискретного вариационного ряда, которые повторяются различное количество раз или имеют разный вес, находится следующим образом:

$$\bar{x}_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_m p_m}{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}, \qquad (7.7)$$

где p_i – абсолютная частота появления значения a_i; m – количество различных значений, которые принимает признак.

Среднее взвешенное можно интерпретировать как среднюю величину для значений a_1, a_2, …, a_m, используемую в ситуациях, когда одни значения более важны по сравнению с другими. Чем больше частота элемента, тем больший вклад вносит этот элемент в значение среднего взвешенного.

Среднее взвешенное можно использовать для оценки неизвестных параметров совокупности, для решения задач, связанных с проверкой гипотез.

Пример 3. Два стрелка сделали по 100 выстрелов. Первый выбил 8 очков 40 раз, 9 очков – 10 раз и 10 очков – 50 раз. Второй выбил 8, 9 и 10 очков соответственно 10, 60 и 30 раз. Какой из стрелков стреляет лучше?

Решение. Вычислим средние взвешенные арифметические $\bar{x}_{ap}$ и $\bar{y}_{ap}$ числа очков, которые выбил при 100 выстрелах каждый из двух стрелков.

$$\bar{x}_{ap} = \frac{8 \cdot 40 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 50}{100} = 9{,}1; \; \bar{y}_{ap} = \frac{8 \cdot 10 + 9 \cdot 60 + 10 \cdot 30}{100} = 9{,}2.$$

Среднее число очков, которое выбивает из 100 выстрелов второй стрелок, несколько выше, чем тот же показатель у первого стрелка. Естественно признать второго стрелка лучшим.

Среднее гармоническое необходимо в том случае, когда наблюдения, для которых мы хотим получить среднее арифметическое, заданы обратными значениями. В общем случае среднее гармоническое значений x_1, x_2, …, x_n определяется по формулам

$$\bar{x}_{gr} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i}} \text{ или } \bar{x}_{gr} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x_i}} \qquad (7.\,8)$$

Средняя гармоническая взвешенная $\left(\bar{x}_{grp}\right)$ вычисляется, когда нет информации о частоте варианта выборки, а известно их произведение $p_i a_i = w_i$:

$$\bar{x}_{grp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{a_i}} \qquad (7.9)$$

Средняя гармоническая простая применяется в тех случаях, когда произведения $p_i a_i$ одинаковы или равны 1.

Пример 4. Первую половину пути турист двигался со скоростью 4 км/ч, а вторую половину – со скоростью 6 км/ч. Какова средняя скорость движения туриста на протяжении всего пути?

$$t = \frac{\frac{S}{2}}{4} + \frac{\frac{S}{2}}{6} = \frac{S}{2 \cdot 4} + \frac{S}{2 \cdot 6}; \; v_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{S}{2 \cdot 4} + \frac{S}{2 \cdot 6}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 4{,}8\left(\frac{км}{ч}\right)$$

При определении коэффициента среднего темпа роста, когда необходимо сохранить неизменным произведение каждой величины признака, применяют *простую геометрическую* $\left(\bar{x}_{gm}\right)$ и *взвешенную геометрическую* $\left(\bar{x}_{gmp}\right)$.

Среднее геометрическое значение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется по формулам:

$$\bar{x}_{gm} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ и } \bar{x}_{gmp} = \sqrt[\sum_{i=1}^{m} p_i]{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{p_m}} \qquad (7.10)$$

Среднее геометрическое используют прежде всего тогда, когда среднее значение вычисляют для значений, заданных через некоторые равные промежутки времени (рост или снижение успеваемости, вклада в банке за несколько лет и др.); когда переменная с течением времени изменяется примерно с одинаковым соотношением между измерениями, когда отдельные значения в статистической совокупности удалены от других значений.

Среднее степенное k-го порядка определяется по формулам

$$\bar{x}^{(k)}_{cmen} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \text{ или } \bar{x}^{(k)}_{cmen} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^k n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (7.11)$$

Среднее степенное второго порядка называют средним квадратичным. Среднее арифметическое является степенным средним порядка 1, среднее гармоническое – порядка (–1).

$$\bar{x}_{kv} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \text{ – простая квадратичная;} \qquad (7.12)$$

$$\bar{x}_{kvp} = \sqrt{\frac{a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + \ldots + a_m^2 p_m}{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}} \text{ – взвешенная квадратичная.} \qquad (7.13)$$

Средняя квадратичная применяется, когда осреднению подлежат величины, выраженные в виде квадратичных функций.

Между величинами степенных средних, рассчитанных по одной и той же совокупности единиц статистического наблюдения и одному и тому же признаку, существует следующее соотношение: $\overline{x}_{gr} < \overline{x}_{gm} < \overline{x}_{a} < \overline{x}_{kv}$.

Структурные средние величины используются для характеристики центральной тенденции изменяющейся случайной величины, уровень случайной величины.

Медиана *(Me)* – значение случайной величины в ранжированном вариационном ряду, делящая его на две равные части.

Медиана обладает важными свойствами, которые в некоторых случаях дают ей преимущество перед другими средними величинами. Например, если при упорядоченном размещении некоторого признака «крайние» значения сомнительные и к тому же резко отличаются от основной массы данных, то в качестве меры центральной тенденции целесообразно использовать медиану, так как на ее величину эти «крайние» значения никакого влияния не оказывают, и в то же время они могут существенным образом повлиять на значение среднего арифметического.

При нахождении медианы дискретного вариационного ряда следует различать два случая, когда объем совокупности: 1) нечетный; 2) четный.

Если объем совокупности нечетный и равен $2n + 1$, и варианты размещены в порядке возрастания их значений:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{n\ \text{значений}}, x_{n+1}, \underbrace{x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}}_{n\ \text{значений}},$$

то $Me = x_n + 1$ (7.14).

Если же количество элементов четное и равно $2n$, то нет варианты, которая бы делила совокупность на две равные по объему части:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{n\ \text{значений}}, \underbrace{x_{n+1}, \ldots, x_{2n}}_{n\ \text{значений}}.$$

Поэтому в качестве медианы условно берется полусумма вариант, находящихся в середине вариационного ряда:

$$Me = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}. \qquad (7.\ 15)$$

Мода *(Mo)* – называют наиболее часто встречающееся значение случайной величины в эмпирическом ряду. Если все значения в вариационном ряду встречаются одинаково часто, то считают, что этот ряд не имеет моды.

Если два соседних значения вариационного ряда имеют одинаковую частоту и она больше частоты любого другого значения, то считают, что мода равняется среднему арифметическому этих значений.

Если два не соседних значения вариационного ряда имеют одинаковую частоту и она больше частоты любого другого значения, то считают, что вариационный ряд имеет две моды, а соответствующее распределение называют бимодальным.

Пример 5. Для нахождения медианы необходимо составить ранжированный вариационный ряд:

34, 40, 40, 45, 45, 45, 49, 51, 53, 53, 53, 53, 58, 64, 64, 64, 70, 72, 72, 72, 72, 81, 85, 85, 90.

Общее количество элементов – 25, число нечетное, поэтому медиана равна числу 58, которое стоит посередине (на 13-м месте).

Для нахождения моды удобно использовать представление выборки в виде дискретного вариационного ряда (таблица 7.3). Из таблицы видно, что два не соседних значения вариационного ряда (72 и 53) имеют одинаковую наибольшую частоту 4, значит рассматриваемый ряд – бимодальный.

Показатели вариации

Вариация – различия (изменчивость) в значениях признака данной генеральной совокупности.

Показатель вариации – числовая характеристика колебания значений случайной величины.

Часто бывает важно знать не только «среднее», наиболее часто встречающееся значение в наборе чисел, но и иметь представление о том, насколько элементы выборки отличаются друг от друга или от среднего значения выборки.

***Размах вариации* (*R*)** показывает, в каких пределах колеблется размер признака, образующего эмпирический ряд:

$R = x\max - x\min$. (7. 16)

Размах показывает, насколько велико рассеивание значений в выборке.

Генеральной средней называется взвешенная средняя арифметическая дискретного вариационного ряда для генеральной совокупности, ***выборочная средняя*** – взвешенная средняя арифметическая выборки.

Отклонение характеризует расположение значений выборки по отношению к ее средней (генеральной или выборочной). Если число меньше среднего, то его отклонение отрицательно; если число больше среднего, то отклонение положительно.

Пример 6. Дан набор чисел: 1, 6, 7, 9, 12.

Среднее арифметическое равно (1+6+7+9+12) : 5=7

Отклонения: 1 – 7= –6; 6 – 7= –1; 7 – 7= 0; 9 – 7= 2; 12 – 7= 5.

Набор отклонений от среднего арифметического является наиболее полной характеристикой разброса чисел. По нему можно судить о том, насколько разнообразны числа в выборке. Если отклонения малы, то числа в выборке расположены близко к среднему арифметическому.

Для любой выборки сумма всех отклонений равна 0.

В примере 6: – 6 – 1 + 0 + 2 + 5=0.

Для большой выборки рассматривать набор отклонений практически неудобно. Надо описать разнообразие чисел в наборе одной характеристикой, одним числом. Размах – слишком грубая мера разброса чисел в выборке; среднее отклонений равно нулю, и его нельзя использовать как меру разброса. Поэтому принято складывать не сами отклонения, а их квадраты. Чем больше отклонения от среднего арифметического, тем больше сумма их квадратов.

Среднее арифметическое квадратов отклонений значения вариации от среднего значения называется генеральной или выборочной ***дисперсией*** (D) (для генеральной совокупности или выборки соответственно): $D_г$ или $D_в$.

$$D = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}. \tag{7.17}$$

Для рассматриваемого набора чисел (пример 6):

$$D_в = \frac{(-6)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2}{5} = 13{,}2.$$

Под первичной обработкой данных будем понимать построение:

1) ранжированного вариационного ряда;
2) таблицы абсолютных и относительных частот;
3) таблицы накопленных частот;
4) таблицы интервального закона распределения;
5) полигона абсолютных или относительных частот;
6) полигона накопленных частот;
7) гистограммы;

а также вычисление:

8) средней степенной величины, наиболее уместной для условий выборки;
9) моды и медианы;
10) абсолютных и относительных показателей вариации.

Для обработки статистических данных можно использовать статистические функции программы Microsoft Excel.

Контрольные вопросы

1. Что такое генеральная совокупность; признак генеральной совокупности; выборка?
2. Что показывает частота значения?
3. Как построить ранжированный ряд; дискретный ряд?
4. Что показывает относительная частота значения?
5. Что показывает ранг объекта? Как подсчитывается ранг объекта?
6. Какие виды табличного и графического представления данных первичной обработки существуют?
7. Какие средние величины существуют, каким образом они находятся?
8. Как найти абсолютные и относительные показатели вариации?
9. Что понимают под первичной обработкой данных?

Лабораторная работа

«Обработка данных в электронных таблицах программы Microsoft Excel»

Задача 1. Составьте таблицу и произведите расчет стоимости 100 г салата, для которого необходимы следующие продукты: картофель – 0,6 кг по 20 руб. за килограмм, колбаса – 500 г по 250 руб., огурцы – 0,3 кг по 50 руб., зеленый горошек – 1 банка массой 300 г за 40 руб. и зелень – 0,1 кг за 400 руб.

Задача 2. Ученики 5-го класса купили школьные принадлежности по следующей цене: тетрадь – 5 рублей, ручка – 8 рублей, карандаш – 7 рублей, ластик – 4 рубля.

Валя – 2 тетради, 3 ручки, 1 карандаш, 4 ластика
Юра – 1 тетрадь, 2 ручки, 4 карандаша, 2 ластика
Костя – 3 тетради, 5 ручек, 2 карандаша, 1 ластик
Марина – 3 тетради, 2 ручки, 2 карандаша, 1 ластик
Валя – 2 тетради, 3 ручки, 1 карандаш, 4 ластика
Света – все предметы по 2 штуки.

Задание:

1) Составьте таблицу к этой задаче.
2) Найдите стоимость покупки каждого из ребят.
3) Найдите общую стоимость покупки.
4) Кто из ребят истратил больше денег на покупку?

Задача 3. Составьте таблицу для решения следующей задачи.

Известны фамилии абитуриентов и результаты экзаменов.

	ФИО	Русский язык	Математика	Обществознание
1	Аликин А. А.	62	48	56
2	Антипина А. Л.	57	56	65
3	Дроздов М. Б.	32	43	52
4	Волков К. В.	81	37	54
5	Галкин Е. Л.	72	56	46
6	Смирнова Н. С.	53	44	71
7	Петрова Е. Н.	64	61	32
8	Савченко Е. К.	83	84	75
9	Косяков И. Н.	69	53	34
10	Зайцева С. Б.	73	42	51

1) Определите сумму баллов у каждого абитуриента.
2) Составьте список абитуриентов в порядке убывания.
3) Определите, будет ли он принят в университет, если известен проходной балл – 170.
4) Определите количество зачисленных в университет.
5) Определите средний балл по каждому предмету.
6) Составьте диаграмму для средних баллов.

Задача 4. Известны фамилии студентов и результаты теста в баллах: Бобров – 72, Орехова – 37, Снегирева – 47, Петров – 54, Смирнова – 24, Симонова – 92, Орлова – 67, Шевелева – 17, Кривко – 81, Антонов – 62, которые необходимо перевести в отметку:

«5» – не меньше 80 баллов;

«4» – не меньше 60, но меньше 80 баллов;

«3» – не меньше 30, но меньше 60 баллов;

«2» – меньше 30 баллов.

Составьте таблицу для решения следующей задачи.

1) Определите отметку каждого студента.
2) Определите, сколько человек получили 5, 4, 3 и 2.
3) Отобразите этот результат в виде графика успеваемости и круговой диаграммы.

Задания для самостоятельной работы

I тип. Общие понятия статистики. Табличное и графическое представление первичной обработки выборки.

7.1. Для эмпирических рядов:

а) 68, 63, 50, 72, 63, 59, 68, 57, 62, 69, 68, 63, 75, 80, 75.

б) 39, 42, 45, 43, 35, 37, 42, 39, 38, 42.

в) 56, 54, 42, 48, 52, 48, 54, 52, 58, 54, 50, 52.

г) 5000, 8000, 11 000, 5000, 3000, 6000, 4000, 6000, 6000, 7000.

Построить:

1) ранжированный, дискретный и интервальный вариационные ряды для выборок;

2) табличный закон распределения абсолютных, относительных и накопленных частот; интервальный закон распределения;

3) полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, а также гистограмму для эмпирических данных.

7.2. По представленным данным восстановить внешний вид эмпирических данных до ранжированного вариационного ряда:

а)

a_i	29	31	34	35	36	38	42	43	48	50	51	54
p_i	1	2	1	2	2	1	3	4	2	1	1	2

б)

a_i	75	79	81	82	84	85	89	90	92
p_i^*	$\frac{2}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$

в)

г)

7.3. В России номинальное напряжение в бытовых сетях 220 В. Ниже приведены результаты 25 измерений (в вольтах) в бытовой сети, которые были сделаны в дневное время в случайно выбранные моменты времени.

225, 227, 225, 228, 225, 228, 218, 217, 218, 220, 223, 225, 216,
222, 224, 220, 218, 221, 220, 216, 214, 219, 231, 228, 227.

1) Какое самое большое и самое маленькое напряжение было зафиксировано?

2) Найдите размах значений, медиану и среднее значение напряжения.

По данным в условиях задач 7.4 и 7.5:

1) укажите генеральную совокупность, признак, выборку, случайную величину, эмпирический ряд;

2) найдите объемы генеральной совокупности и выборки;

3) определите вид случайной величины: дискретная или непрерывная.

Общее задание: по данной выборке постройте:

− ранжированный, дискретный и интервальный вариационные ряды;

− табличный закон распределения абсолютных, относительных и накопленных частот, а также интервальный закон распределения;

− полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, гистограмму.

7.4. В университете среди 1000 человек дневного отделения нужно выяснить средний рост студента. Получена выборка:

165, 172, 159, 167, 165, 185, 164, 165, 180, 172, 156, 170, 166, 167, 167, 165, 160, 165, 170, 172, 172, 180, 165, 172, 165, 180.

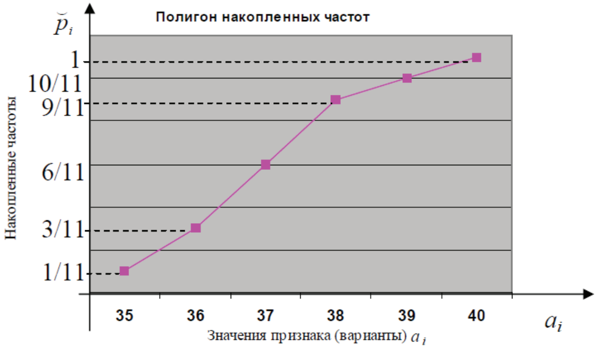
7.5. За день обувной магазин обслуживает 120 человек. Получена выборка: 39, 42, 45, 43, 35, 37, 42, 39, 38, 42.

7.6. Найдите среднее значение; размах; медиану; моду; дисперсию для выборки: а) 1, 2, 3, 3, 4; б) 0, 2, 2, 3, 4; в) 12, 7, 25, 3, 19, 15, 7, 7, 12, 19, 12; г) 5, 17, 19, 5, 41, 47, 13, 19, 5.

7.7. Контрольная работа десяти учащихся проверялась двумя преподавателями и оценивалась ими по 12-балльной шкале. Результаты оценивания представлены в таблице. Какой из преподавателей строже?

№ ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й преподаватель	7	11	6	8	3	10	8	5	7	10
2-й преподаватель	5	12	6	7	2	11	9	3	6	10

7.8*. По полигону накопленных частот восстановить внешний вид эмпирических данных до ранжированного вариационного ряда.



II тип. Средние величины. Найти наиболее подходящую среднюю величину (арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратичную среднюю; простую или взвешенную). Найти моду и медиану по следующим данным:

7.9. Выборка по возрасту учащихся, посещающих туристический кружок в школе:

12; 13; 10; 18; 10; 15; 11; 14; 19; 13; 12; 15; 13; 10; 16; 14.

7.10. Выборка по возрасту учащихся, посещающих театральный кружок в школе:

a_i	9	10	12	14	16	17
p_i	2	3	5	4	1	1

7. 11. Исследовалась скорость бега одного спортсмена на 100 метров в течение года, получили выборку:

ai	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,9
ai pi = wi	11,2	22,6	34,2	46	23,2	11,7	11,9

7.12. В течение рабочего дня выборочно были сняты показания амперметра с одного станка, получились следующие результаты:

a_i	0,2	0,3	0,4	0,6
ai pi = wi	12	12	12	12

7.13. За девять учебных четвертей у учащегося наблюдались следующие коэффициенты прироста скорости чтения:

1,2; 1,1; 1,3; 1,2; 1,4; 1,1; 1,2; 1,2; 1,4.

7.14. Коэффициент успевающих учеников класса за 10 недель имел следующие значения:

a_i	0,75	0,95	1	1,1	1,2	1,25
pi	1	2	4	1	1	1

7.15. При измерении площадей квадратных садовых участков получена выборка из длин сторон участков: 2; 1; 3; 3; 4; 5; 2; 1.

7. 16. По таблице найти моду и медиану:

a_i	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,9
$a_i\, p_i = w_i$	11,2	22,6	34,2	46	23,2	11,7	11,9

III тип. Показатели вариации

7. 17. Найти показатели вариации для выборки:

2; 4; 6; 1; 0; 4; 7; 6; 4; 2; 1.

7.18. В таблице приведены результаты тестирования по математике 100 учащихся 7-х классов.

Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число учащихся	3	4	4	9	11	12	18	14	9	8	6	2

Какой процент качества в этой школе (ученики, решившие тест на «4» и «5») по следующим критериям:

Количество баллов	<5	5–7	8–10	>10
Отметка	2	3	4	5

Для данных в условиях задач 19 и 20 проведите первичную обработку данных.

7.19. Дан рост случайно выбранных девушек:
164, 170, 160, 163, 170, 171, 166, 169, 166, 165,
167, 164, 168, 164, 167, 165, 164, 158, 167, 159,
161, 169, 162, 170, 168, 165, 165, 166, 164, 173,
158, 166, 168, 167, 161, 167, 165, 168, 165, 164,
163, 169, 161, 162, 163, 160, 166, 169, 172, 160.

7.20. Дана скорость чтения учащихся вторых классов:
53, 49, 90, 27, 64, 58, 34, 53, 85, 72,
30, 90, 45, 34, 25, 61, 49, 39, 45, 56,
72, 34, 82, 47, 64, 29, 78, 58, 32, 64,
110, 35, 78, 29, 65, 42, 38, 83, 57, 71,
68, 49, 82, 37, 57, 55, 29, 43, 78, 39.

Индивидуальные варианты заданий

Проведите первичную обработку данных:

1 Размеры проданной в магазине мужской обуви:
41, 39, 40, 38, 43, 41, 42, 40, 38, 41, 42, 41, 40, 42, 39, 41, 41, 36, 43, 41,
42, 38, 41, 40, 42, 41, 42, 42, 42, 40, 41, 41, 39, 42, 40, 40, 39, 41, 39, 38,
40, 41, 41, 40, 40, 39, 42, 40, 43, 37, 40, 42, 43, 42, 38, 40, 40, 41, 41, 41,
40, 43, 42, 42, 39, 43, 41, 40, 43, 41, 42, 42, 39, 41, 43, 42, 41, 42, 40, 37.

2 Распределение числа взрослых рабочих-мужчин цеха по росту

Рост, см	143–146	146–149	149–152	152–155	155–158	158–161	161–164	164–167
Число мужчин	1	2	8	26	65	120	181	201
Рост, см	167–170	170–173	173–176	176–179	179–182	182–185	185–188	Всего
Число мужчин	170	120	64	28	10	3	1	1000

3 Данные о массе новорожденных детей при рождении:

Масса, г	1000–1500	1500–2000	2000–2500	2500–3000	3000–3500
Число детей	1	2	8	26	65
Масса, г	3500–4000	4000–4500	4500–5000	5000–5500	Всего
Число детей	170	120	64	28	10 000

4	Волейбольной командой за 2 года было проведено 500 матчей. После каждого матча записывались выигранные очки и счет команды. Вычислить основные статистики счета данной команды, если выборка дала такие результаты: 56, 43, 35, 56, 84, 96, 56, 46, 54, 67, 86, 66, 57, 67, 46.
5	Число бракованных изделий на некотором производстве в течение 20 дней равнялось 24, 28, 5, 10, 22, 5, 19, 0, 3, 18, 20, 4, 0, 1, 21, 17, 10, 20, 4, 7. Если бы регистрация числа бракованных изделий продолжалась еще три дня, и если бы характеристика числа бракованных изделий была такой же, как и в остальные дни, то какое число бракованных изделий можно было бы ожидать за 23 дня?

Рекомендуемая литература

1. Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я. С. Бродский. – М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003.

4. Грес П. В. Математика для гуманитариев: учебное пособие / П. В. Грес. – М.: Логос, 2009 (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

5. Гришин М. П. Математика и информатика: учебное пособие / М. П. Гришин. – 2-е изд., стереотипное. – М.: МГИУ, 2005.

6. Гусева Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. – М.: Флинта, 2011 (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

7. Лисьев В. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. П. Лисьев. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2007. 199 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

8. Монсик В. Б. Вероятность и статистика: учеб. пособие / В. Б. Монсик. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2011. 381 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

9. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А., Симонова Г. И. Теория вероятностей: учебник для экономических и гуманитарных специальностей. – М.: МЦНМО, 2009. 256 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Раздел 8.
МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ДАННЫХ

Задания и вопросы для подготовки к занятию

1. Предположим, что вы при проведении своего исследования предложили свою систему заданий и вопросов, отличную от той, которая предлагается в школьных учебниках. Изменится ли результат обучения при этом? Что, по вашему мнению, может измениться в результатах обучения? А можно ли это изменение «научно» обосновать или «измерить» каким-либо образом?

2. Получив результаты одинаковых контрольных работ в двух классах, можно ли по количеству пятерок утверждать, что где больше пятерок, там учащиеся усвоили материал лучше? А по количеству пятерок и четверок? Что, на ваш взгляд, необходимо еще учитывать при сравнении результатов?

Общие теоретические сведения

Для педагога очень важно уметь анализировать результаты своей профессиональной деятельности, а также грамотно планировать и проводить психолого-педагогические эксперименты, обрабатывать их результаты.

Специфика статистической обработки результатов психолого-педагогических исследований заключается в том, что анализируемая база данных характеризуется большим количеством показателей различных типов, необходимостью учета объективных и субъективных факторов, сложностью корреляционных связей между переменными выборками.

Психолого-педагогические исследования можно разбить на три группы. *Первая* – номинальные переменные (пол, возраст и другие анкетные данные). Арифметические операции над такими величинами не имеют смысла, поэтому результаты описательной статистики (выборочные средние, дисперсия) к таким величинам не применяются. Классический способ их анализа – разбиение на классы относительно выбранных номинальных признаков и проверка значимости различий по классам. *Вторая группа* имеет количественную шкалу измерения, которая является порядковой (ординальной). При анализе ординальных переменных используются как разбиение на подвыборки, так и ранговые технологии (например, нахождение ранговой корреляции). *Третья группа* – количественные переменные, отражающие степень выраженности замеряемого показателя (например, успеваемость; тесты Амтхауэра, Кеттела и другие оценочные тесты).

Педагогический (или формирующий) эксперимент – это специфический исключительно для педагогики вид эксперимента, в котором активное воздействие экспериментальной ситуации на испытуемого должно способствовать его развитию и личностному росту.

Как правило, в эксперименте участвуют две группы: экспериментальная и контрольная. Необходимо, чтобы до эксперимента обе группы несущественно отличались по исследуемому признаку. Только ученикам экспериментальной группы предлагается новый метод обучения (воспитания) или определенное задание, которое (по мнению экспериментаторов) будет способствовать формированию заданного качества. В конце эксперимента две группы снова сравниваются между собой для оценки полученных результатов.

Важно не только зафиксировать и сравнить полученные результаты, но и обосновать их, доказать неслучайность и значимость полученных различий. Как правило, установить связь между воздействием на испытуемого и полученным результатом, обосновать эффективность (или неэффективность) проведенного эксперимента помогают инструменты математической статистики.

Большинство педагогических исследований призвано ответить на вопрос: «Верно ли сделанное предположение?», «Подтверждается ли выдвинутая гипотеза?».

Для корректного исследования необходимо, чтобы выборка в максимальной мере соответствовала генеральной совокупности, отражала наблюдаемые в ней явления, их изменчивость, т. е. была *репрезентативной.* Наиболее простой способ добиться репрезентативности – это составить выборку методом случайного отбора исследуемых объектов. Данный метод предполагает соблюдение таких условий, при которых каждый член генеральной совокупности имеет равные шансы попасть в выборку. Наличие какой-либо закономерности отбора не допускается.

Одной из задач педагогического исследования является сравнение полученных результатов. В литературе описаны разнообразные критерии оценки полученных результатов и выдвинутых гипотез. Рассмотрим некоторые из них.

Результаты исследования репрезентативной выборки можно подвергать анализу с использованием ***математических методов***. Наиболее часто результаты опыта представляют в виде вариационного ряда.

Пример 1. Петя и Вася прыгали в длину с места и свои результаты (в см) записали в таблицу.

Номер прыжка	1	2	3	4	5
Петя	190	205	195	210	200
Вася	185	200	215	195	205

Кто из ребят прыгает дальше? Кто прыгает стабильнее?

Для того чтобы определить, как сильно отличаются результаты друг от друга, рассматривают показатели рассеивания.

Главная характеристика рассеивания вариационного ряда – дисперсия. Чем больше значение дисперсии, тем сильнее отличие значений измеряемой величины друг от друга.

Петя						Медиана	Среднее	Размах	Дисперсия
Результаты	**190**	**195**	**200**	**205**	**210**	200	200	20	50
Отклонение	-10	-5	0	5	10				
Квадрат отклонения	100	25	0	25	100				

Вася						Медиана	Среднее	Размах	Дисперсия
Результаты	**185**	**200**	**215**	**195**	**205**	200	200	30	100
Отклонение	-15	0	15	-5	5				
Квадрат отклонения	225	0	225	25	25				

По таблице видно, что дальше прыгнул Вася, но результаты стабильнее у Пети (размах и дисперсия его результатов меньше).

Пример 2. После написания одной и той же срезовой контрольной работы по математике ученики двух десятых классов одной школы показали следующие результаты при условии, что работы проверял один учитель:

Отметка	2	3	4	5
Количество учащихся 10 «А» класса, получивших соответствующую отметку	2	7	10	3
Количество учащихся 10 «Б» класса, получивших соответствующую отметку	1	9	10	1
Количество учащихся обоих классов, получивших соответствующую отметку	3	16	20	4

Ученики какого класса справились с контрольной работой лучше?

Таким образом, возникает необходимость сравнения данных из нескольких вариационных рядов.

Найдем выборочные средние (формула 7.7) для двух классов.

Для 10 «А» класса: $\bar{x}_{ap} = \dfrac{2\cdot 2 + 3\cdot 7 + 4\cdot 10 + 5\cdot 3}{2+7+10+3} = \dfrac{80}{22} \approx 3{,}64$.

Для 10 «Б» класса: $\bar{x}_{ap} = \dfrac{2\cdot 1 + 3\cdot 9 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1}{1+9+10+1} = \dfrac{74}{21} \approx 3{,}52$.

Заметим, что выборочная средняя в данном примере показывает среднюю оценку десятиклассников. По полученным расчетам можно сделать вывод, что 10 «А» класс с контрольной работой справился лучше, так как в этом классе средняя оценка за контрольную работу выше, чем в 10 «Б».

Средний балл для обоих классов равен:

$$\bar{x}_{ap} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 16 + 4\cdot 20 + 5\cdot 4}{43} = \frac{154}{43} \approx 3{,}58 .$$

То есть средний балл за контрольную работу в обоих классах выше, чем в «Б», но ниже, чем в «А».

Дисперсия позволяет оценить не только степень различия показателей внутри группы, но и может быть использована для определения отклонения данных между разными группами. Для этого используют несколько видов дисперсии: внутригрупповую и межгрупповую.

Если в качестве выборки берется какая-либо группа, то дисперсия называется *групповой дисперсией.* Чтобы отразить различия между дисперсиями нескольких групп, существует понятие *межгрупповой дисперсии*:

$$D_{межгр} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x}_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}, \tag{8.1}$$

и *внутригрупповой дисперсии:*

$$D_{внгр} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}, \tag{8.2}$$

где k – число групп в общей выборке, $\overline{x}$ – выборочная средняя для всех групп; $\overline{x}_i$ – выборочная средняя, D_i. – дисперсия и n_i – объем выборки i-й группы.

Во втором примере выборка учащихся разбивается на две группы. Выборочная средняя для всех групп равна:

$\overline{x} = \dfrac{3{,}64 \cdot 22 + 3{,}52 \cdot 21}{22 + 21} = \approx 3{,}58$ (ранее она была найдена другим способом).

$$D_{межгр} = \frac{(3{,}64 - 3{,}58)^2 \cdot 22 + (3{,}52 - 358)^2 \cdot 21}{22 + 21} = 0{,}0002 .$$

Так как межгрупповая дисперсия близка к нулю, то можно сделать вывод, что отметки одной группы (10 «А» класса) в малой степени отличаются от отметок второй группы (10 «Б»). Иными словами, с точки зрения межгрупповой дисперсии рассмотренные группы в незначительной степени отличаются по заданному признаку.

Межгрупповая и общая дисперсии помогают определить, насколько сильно результат педагогического эксперимента (или другого опыта) обусловлен принадлежностью испытуемого к той или иной группе. Для этого используется ***коэффициент детерминации***

$$\eta^2 = \frac{D_{межгр}}{D_в}. \tag{8.3}$$

Пример 3. Оценки, полученные на ЕГЭ по математике выпускниками классов с разными профилями, описаны в следующей таблице:

Профиль группы (класса)	**Средний балл в группе, x_i**	**Численность группы (чел.), n_i**	**Дисперсия в группе, D_i**
Общеобразовательный	62	23	10,15
Гуманитарный	59	25	9,81
Естественно-географический	71	18	12,3
Физико-математический	75	30	8,6

Необходимо определить, в какой степени успешность сдачи ЕГЭ зависит от принадлежности к тому или иному потоку.

Решение. Найдем средний балл за экзамен для всей совокупности испытуемых:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i \cdot n_i}{\sum_i n_i} = \frac{62 \cdot 23 + 59 \cdot 25 + 71 \cdot 18 + 75 \cdot 30}{23 + 25 + 18 + 30} \approx 67.$$

Найдем межгрупповую дисперсию:

$$D_{межгр} = \frac{(62-67)^2 \cdot 23 + (59-67)^2 \cdot 25 + (71-67)^2 \cdot 18 + (75-67)^2 \cdot 30}{23 + 25 + 18 + 30} \approx 45{,}66.$$

Найдем внутригрупповую дисперсию:

$$D_{внгр} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{10{,}15 \cdot 23 + 9{,}81 \cdot 25 + 12{,}3 \cdot 18 + 8{,}6 \cdot 30}{96} \approx 9{,}98.$$

Определим общую дисперсию: $D_в = D_{внгр} + D_{межгр} = 9{,}98 + 45{,}66 = 55{,}64$, $\eta^2 = \frac{D_{межгр}}{D_в} = \frac{45{,}66}{55{,}64} \approx 0{,}82.$

Полученный коэффициент детерминации показывает, что успешность сдачи ЕГЭ в данном опыте на 82% обусловлена принадлежностью учащегося к той или иной группе.

Используется также ***эмпирическое корреляционное отношение***, получаемое извлечением квадратного корня из коэффициента детерминации.

В рассматриваемом примере $\eta = \sqrt{0{,}82} \approx 0{,}91.$

Чем ближе значение корреляционного отношения к единице, тем более тесная связь существует в рассматриваемом опыте. В данном случае показано наличие тесной связи между успешностью сдачи ЕГЭ и принадлежностью учащегося к той или иной группе обучаемых.

Общая дисперсия помогает численно оценить, как сильно отличаются варианты выборки друг от друга. Межгрупповая дисперсия помогает выявить степень различия между группами данной выборки. Однако в педагогических исследованиях зачастую не требуется численная оценка параметра, но при этом важно знать существенно ли отличаются испытуемые (или группа испытуемых) друг от друга по тому или иному признаку. Ответ на такой вопрос дает ***коэффициент вариации.***

На разных этапах статистического исследования возникает необходимость в формировании и экспериментальной проверке некоторых предполагаемых утверждений (гипотез).

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет вид *А*, выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *А*.

Статистической называют *гипотезу* о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет опровергнута, то имеет место противоречащая ей гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_o. *Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 5, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a\neq5$. Коротко записывают так: H_o: $a=5$; H_1: $a\neq5$.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку проводят статистическими методами, то ее называют статистической.

В итоге проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. *Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать α; ее называют *уровнем значимости.* Например, если принят уровень значимости, равный 0,03, то это означает, что в трех случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (опровергнуть правильную гипотезу).

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную величину, точное или приближенное значение которой известно. Эту величину обозначают через *U или Z*, если она распределена нормально; υ^2 или *F* – по закону Фишера или *T – по закону Стьюдента,* χ^2 – по закону «хи квадрат» и т. д.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину, которая служит для проверки нулевой гипотезы. Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия принимают отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\,. \qquad (8.4)$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают различные, заранее неизвестные значения.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия.

Наблюдаемым значением называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия F

$$F_{набл} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4 .$$

После выбора определенного критерия множество всех его значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

Критическая область – совокупность значений критерия, при которых гипотезу отвергают. *Область принятия гипотезы* – совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критическую области.

Рассмотрим один из методов проверки гипотезы – *сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны.*

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, их дисперсии известны (или найдены). По независимым выборкам, объемы которых n и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нул е-вую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, т. е. $H_о$: $M(X) = M(Y)$.

Учитывая, что $M(\bar{X}) = M(X)$ и $M(\bar{Y}) = M(Y)$, нулевую гипотезу можно записать так: $H_о$: $M(\bar{X}) = M(\bar{Y})$.

Такая задача ставится потому, что выборочные средние, как правило, оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо различаются выборочные средние?

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_о$: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе:

1) H_1: $M(X) \neq M(Y)$ (критическая область – двусторонняя), надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}, \tag{8.5}$$

по таблице функции Лапласа (приложение) найти критическую точку из равенства

$$\Phi_{Z_{кр}} = \frac{(1-\alpha)}{2}. \tag{8.6}$$

Если $|Z_{набл}| < Z_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > Z_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

2) H_1: $M(X) > M(Y)$ (критическая область – правосторонняя), надо вычислить наблюдаемое значение критерия по формуле (8.2), по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства

$$\Phi_{Z_{кр}} = \frac{(1-2\alpha)}{2}. \tag{8.7}$$

Если $Z_{набл} < Z_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > Z_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

3) H_1: $M(X) < M(Y)$ (критическая область – левосторонняя), надо вычислить наблюдаемое значение критерия по формуле (8.2), по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства

$$\Phi_{Z_{кр}} = \frac{(1-2\alpha)}{2} \tag{8.4}$$

Если $Z_{набл} > -Z_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} < -Z_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пример 4. По двум неизвестным выборкам, объемы которых соответственно равны n=60 и m=50, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$=1250 и $\bar{y}$=1275. Генеральные дисперсии известны: $D(X)$=120, $D(Y)$=100. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_o: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n}+\frac{D(Y)}{m}}} = \frac{1250-1275}{\sqrt{\frac{120}{60}+\frac{100}{50}}} = -12{,}5.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область – двусторонняя.

Найдем правую критическую точку: $\Phi_{Z_{кр}} = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495$. По таблице Лапласа находим $Z_{кр}$ = 2,58. Так как $|Z_{набл}| > Z_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергаем, т. е. выборочные средние отличаются значимо.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проведение ЕГЭ по математике в трех школах дало следующие результаты по 100-балльной шкале:

Школа	Школа № 1	Школа № 2	Школа № 3
Средний балл	72	85	69
Количество учащихся, сдававших ЕГЭ	50	44	61

Определите средний результат для трех школ. Найдите межгрупповую дисперсию, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение. Какие выводы можно сделать по данным таблицы?

2. По двум неизвестным выборкам, объемы которых соответственно равны n=10 и m=10, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\overline{x}$=14,3 и $\overline{y}$=12,2. Генеральные дисперсии известны: $D(X)$=22, $D(Y)$=18. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_o: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе: а) H_1: $M(X) \neq M(Y)$; б) $M(X) > M(Y)$ в) $M(X) < M(Y)$.

3. По двум неизвестным выборкам, объемы которых соответственно равны n=50 и m=50, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\overline{x}$=142 и $\overline{y}$=150. Генеральные дисперсии известны: $D(X)$=28,2 и $D(Y)$=22,8. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_o: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе: а) H_1: $M(X) \neq M(Y)$; б) $M(X) > M(Y)$ в) $M(X) < M(Y)$.

4. По двум неизвестным выборкам, объемы которых соответственно равны n=100 и m=120, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\overline{x}$=32,4 и $\overline{y}$=30,1, и выборочные дисперсии равны: $D_в(X)$=15,0 и $D_в(Y)$=22,8. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_o: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе: а) H_1: $M(X) \neq M(Y)$; б) $M(X) > M(Y)$ в) $M(X) < M(Y)$.

Рекомендуемая литература

1. Афанасьев В. В. Теория вероятностей [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В. В. Афанасьев. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. 350 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

2. Афанасьев В. В., Сивов М. А. Математическая статистика в педагогике: учебное пособие / под науч. ред. д-ра ист. наук, проф. М. В. Новикова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003.

4. Лисьев В. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. П. Лисьев. – М.: изд. центр ЕАОИ, 2010. 199 с. (ЭБС «Университетская библиотека онлайн»).

Приложение

Таблица значений локальной функции Лапласа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Учебное издание

Власова Ирина Николаевна
Лурье Михаил Леонидович
Мусихина Ирина Васильевна
Худякова Анна Владимировна

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие
Направление 050100 – Педагогическое образование

Свидетельство о государственной аккредитации вуза
№ 1806 от 11.03.2009 г.
Изд. лиц. ИД № 03857 от 30.01.2001 г.
Подписано в печать 28.112013. Формат 60x90 1/16
Бумага ксероксная. Печать на ризографе. Набор компьютерный.
Усл. печ. л. 8,75. Уч.-изд. л 5,1.
Тираж 300 экз.Заказ № 20800

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24, корп. 2, оф. 71,
тел. (342) 238-63-12

Отпечатано в ООО «ПК «АСТЕР»
614064, г. Пермь, ул. Усольская, 15, тел.: (342) 206-06-86